روش تقریبات متوالی

نائوم یاکوولویچ ویلنکین

ترجمه‌ی قاسم کیانی مقدم

به نام خداوند جان و خرد

روش تقریبات متوالی

نائوم یاکوولویچ ویلنکین

ترجمه‌ی قاسم کیانی مقدم

این کتاب ترجمه‌ای است از

Method of Successive Approximations

(Метод Последовательных Приближений)

Naum Yakovlevich Vilenkin

(Наум Яковлевич Виленкин)

Translated from Russian into English by

Mark Samokhvalov

Mir Publishers

Moscow, 1979

ghasemkiani@gmail.com

File version: 0099_2012-12-30

آخرین نسخه‌ی این فایل از نشانی زیر قابل دریافت است:

http://sn.im/method_of_successive_approximations

برای گفتگو در مورد این کتاب می‌توانید به صفحه‌ی ویژه‌ی آن در گوگل‌پلاس با نشانی زیر مراجعه کنید:

https://plus.google.com/116159376559655367069

ترجمه‌ی این اثر به زنده‌یاد پرویز شهریاری تقدیم می‌شود.

فهرست

پیش‌گفتار ویراست دوم روسی

برای ویراست دوم، کتاب مورد بازبینی قرار گرفته است. اکنون ارائه‌ی روش تکرار بر پایه‌ی نگاشت انقباضی صورت می‌گیرد، چرا که امکان در نظر گرفتن این مفهوم قبل از معرفی مفهوم مشتق وجود دارد. بخشی از کتاب که به حل تقریبی دستگاه‌های معادلات اختصاص دارد، به طور قابل ملاحظه‌ای بزرگ‌تر شده است. و بالاخره، برای تمام مسئله‌ها حل ارائه شده است.

پیش‌گفتار ویراست اول روسی

مقصود اصلی از این کتاب، ارائه‌ی روش‌های مختلف حل تقریبی معادلات است. ارزش عملی آنها محل تردید نیست، و با این حال، کمتر توجهی چه در دبیرستان و چه در دانشگاه به آنها مبذول می‌شود، و بنا بر این، کسی که دوره‌ی ریاضیات عالی را در حد سال‌های نخست دانشگاه گذرانده است، معمولاً در حل یک معادله‌ی متعالی از ساده‌ترین نوع مشکل دارد. تنها مهندسان نیستند که محتاج به حل معادلات هستند، بلکه تکنیسین‌ها، کارشناسان فناوری تولید، و شاغلان حرفه‌های دیگر نیز بدان نیاز دارند. برای دانش‌آموزان دبیرستان نیز خوب است که با روش‌های حل تقریبی معادلات آشنا شوند.

از آنجا که اکثر روش‌های حل تقریبی با مفهوم مشتق سر و کار دارند، ما مجبور به معرفی این روش هستیم. ما این مفهوم را به طور شهودی معرفی می‌کنیم و از تفسیر هندسی آن استفاده می‌کنیم. لذا دانش ریاضی در حد دبیرستان برای خواندن این کتاب کفایت می‌کند.

مؤلف در تألیف این کتاب از درسی که برای شاگردان کلاس نهم و دهم و اعضای محفل ریاضی مدرسه در دانشگاه دولتی لومونوسوف (Lomonosov) ارائه کرده است، بهره برده است. مطالب ارائه شده در این درس توسط یکی از معلمان دبیرستان شماره‌ی ۴۲۵ به نام اس. ای. شوارتزبورد (S. I. Schwartzburd) برای کار فوق‌برنامه‌ی شاگردان کلاس نهم مورد استفاده قرار گرفته است. مؤلف از اس. ای. شوارتزبورد به خاطر ارائه‌ی مسایلی در مورد حل معادلات با روش تکرار سپاسگزاری می‌کند. از این مسایل در نوشتن این کتاب استفاده شد. مؤلف سپاس عمیق خود را از و. گ. بولتیانسکی (V. G. Boltyansky) که نظراتش در بهبود دست‌نویس اولیه‌ی این کتاب بسیار سودمند واقع شد، ابراز می‌دارد.

پیش‌گفتار مترجم

ترجمه‌ی این کتاب، گرچه از حدود ۲۰ سال پیش آغاز شده بود، اما تا کنون نیمه‌کاره مانده بود. خوشبختانه امسال فرصتی دست داد تا این کار را به پایان برسانم. سعی من بر این بوده است که کتاب را با شکلی آراسته برای خوانندگان آماده سازم. از این رو، تمام نمودارهای کتاب دوباره ترسیم شده است، تا از نظر بصری کیفیت بهتری داشته باشد.

از خوانندگان تقاضا دارم نظرات و پیشنهادهای خود را در زمینه‌ی چگونگی ترجمه و آماده‌سازی کتاب برایم بفرستند تا در ویرایش‌های بعدی مورد استفاده قرار گیرد. نشانی من ghasemkiani@gmail.com است.

۱ مقدمه

در درس ریاضیات مدرسه وقت زیادی صرف حل معادلات و دستگاه‌های معادلات می‌شود. در آغاز، معادلات درجه‌ی اول و دستگاه‌های این معادلات بررسی می‌شوند. سپس، معادلات درجه‌ی دوم، معادلات دومجذوری (biquadratic)، و معادلات گنگ تدریس می‌شوند. و بالاخره، شاگردان معادلات نمایی، لگاریتمی، و مثلثاتی را می‌آموزند.
اتفاقی نیست که تا بدین حد به معادلات توجه می‌شود. علت آن است که معادلات در کاربردهای عملی ریاضیات حایز اهمیت والایی هستند. هر زمینه‌ی کاربردی را که انتخاب کنید، برای رسیدن به جواب نهایی باید به حل معادلات یا دستگاه‌های معادلات بپردازید. در مدرسه، اغلب از معادلات برای حل مسایل فیزیک استفاده می‌شود. مثلاً، مسئله‌ی زیر را در نظر بگیرید.

سنگی به درون چاهی انداخته می‌شود. اگر صدای برخورد سنگ با آب، T ثانیه پس از انداختن آن شنیده شود، عمق چاه را پیدا کنید.

اگر عمق چاه را با x نشان دهیم، برای پیدا کردن آن به معادله‌ی زیر می‌رسیم:

$$\sqrt{\frac{۲x}{g}}+\frac{x}{v}=T$$

که در اینجا v سرعت صوت در هوا است ($\sqrt{۲x/g}$ زمانی است که طول می‌کشد سنگ بیفتد، و x/v زمانی است که طول می‌کشد صدای برخورد سنگ با آب به ما برسد). این یک *معادله‌ی گُنگ* است. با قرار دادن $\sqrt{x}=y$ آن را به یک معادله‌ی درجه‌ی دوم تحویل می‌کنیم:

$$\frac{y^۲}{v}+\sqrt{\frac{۲}{g}}y-T=۰$$

که با استفاده از فرمول معروف معادلات درجه‌ی دوم قابل حل است.
از معادلات برای حل مسایل هندسی نیز استفاده می‌شود. مثلاً مسئله‌ی تقسیم کردن پاره‌خط AB به طول l به پاره‌خط‌های AC و CB به طوری که داشته باشیم $AB:AC=AC:CB$، منجر به معادله‌ی درجه‌ی دوم زیر می‌شود

$$x^۲+lx-l^۲=۰$$

که در اینجا x نشان دهنده‌ی طول پاره‌خط AC است.
مسئله‌ی تقسیم کردن زاویه‌ی α به سه قسمت منجر به معادله‌ی پیچیده‌تری می‌شود. این معادله به صورت زیر است:

$$۴x^۳ - ۳x - \cos\alpha = ۰,$$

که در اینجا $x = \cos\frac{\alpha}{۳}$. اینگونه معادلات که *معادلات درجه‌ی سوم* نامیده می‌شوند، در ریاضیات مدرسه تدریس نمی‌شوند، ولی در هر کتاب جبر عالی اثبات می‌شود که برای حل اینگونه معادلات فرمولی وجود دارد (رک. فرمول (۳) در زیر).
اما در فیزیک اغلب به مسایلی بر می‌خوریم که به معادلات پیچیده‌تری منتهی می‌شوند که حل آنها نه در مدرسه یاد داده می‌شود و نه در دانشگاه. مثلاً یک تیرک آهنی را در نظر بگیرید که دو انتهای آن را محکم کرده‌ایم. اگر به تیرک ضربه بزنیم، نوساناتی عرضی در آن ایجاد می‌شوند. در فیزیک ریاضی نشان داده می‌شود که برای یافتن بسامد این نوسانات، باید معادله‌ی

$$e^x + e^{-x} = \frac{۲}{\cos x} \tag{۱}$$

را حل کرد، که در اینجا $e = ۲/۷۱۸۲۸\ldots$.
در مدرسه برای حل اینگونه معادلات هیچ قاعده‌ای آموخته نمی‌شود. فکر نکنید که این ناشی از کوتاهی برنامه‌ی درسی ریاضیات مدرسه است. برای حل معادله‌ی (۱) هیچ فرمولی—به معنایی که معمولاً در مدرسه پذیرفته شده است—وجود *ندارد*. بگذارید این مطلب را دقیق‌تر بیان کنیم.
گفته می‌شود یک معادله فرمول حل دارد در صورتی که بتوان ریشه‌های آن را بر حسب ضرایب معادله به کمک عمل‌های حسابی، استخراج ریشه و توان، و توابع لگاریتمی، مثلثاتی، و مثلثاتی معکوس بیان کرد. به این مفهوم، معادله‌ی درجه‌ی دوم $x^۲ + px + q = ۰$ فرمول حلی به صورت زیر دارد:

$$x = -\frac{p}{۲} \pm \sqrt{\frac{p^۲}{۴} - q}. \tag{۲}$$

برای حل معادله‌ی درجه‌ی سوم*

$$x^۳ + px + q = ۰$$

نیز فرمولی وجود دارد. این فرمول به صورت زیر است:

$$\sqrt[۳]{-\frac{q}{۲} + \sqrt{\frac{q^۲}{۴} + \frac{p^۳}{۲۷}}} + \sqrt[۳]{-\frac{q}{۲} - \sqrt{\frac{q^۲}{۴} + \frac{p^۳}{۲۷}}}. \tag{۳}$$

اما در عمل، استفاده از فرمول (۳) با دشواری‌هایی رو به رو است و مستلزم استفاده از اعداد مختلط است.

* به کمک جایگزینی $y = x + \frac{a_1}{3a_0}$، هر معادله‌ی درجه‌ی سوم $a_0 x^3 + a_1 x^2 + a_2 x + a_3 = 0$ را می‌توان به شکل فوق تبدیل کرد.

فرمولی نیز برای حل معادلات درجه‌ی چهارم وجود دارد، ولی چون خیلی پیچیده است، آن را در اینجا ارائه نمی‌کنیم.

در مورد معادلات درجه‌ی چهارم و پنجم وضع از این هم بدتر است. ریاضی‌دان نروژی نیلز آبل (Nicls Abel) در سال ۱۸۲۶ نشان داد که برای $n \geq 5$، هیچ فرمولی برای حل معادله‌ی جبری

$$a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_n = 0$$

به کمک عمل‌های حسابی و استخراج ریشه وجود ندارد. فقط برای حالت‌های خاص معادلات جبری با درجه‌ی بالاتر از چهار، فرمول حل وجود دارد.*

* در مورد معادلات جبری، رک.
A G Kurosh, *Algebraic Equations of Arbitrary Degrees*, Mir Publishers, Moscow, 1977.

اگر ریاضی‌دانان مطالعات خود را محدود به معادلاتی که حل دقیق، یعنی به صورت نوعی فرمول، دارند، می‌کردند، ممکن بود مثلاً چنین گفتگویی بین یک مهندس و یک ریاضی‌دان اتفاق بیفتد:

مهندس: هنگام طراحی یک سازه، به این معادله رسیدم (معادله را نشان می‌دهد). باید فوراً جواب آن را به دست آورم—باید پروژه را در طی یک ماه به پایان برسانم.

ریاضی‌دان: خوشحال می‌شدم به شما کمک کنم، ولی برای این نوع معادله، حلی وجود ندارد.

مهندس: نمی‌توانید فرمولش را به دست آورید؟

ریاضی‌دان: فایده‌ای ندارد. مدت‌ها پیش ثابت شده که فرمولی برای حل این نوع معادلات وجود ندارد.

می‌توان تصور کرد که پس از چنین گفتگویی، دیدگاه مهندس در باره‌ی ریاضیات و توانایی‌های آن چقدر منفی خواهد شد. خوشبختانه چنین مکالمه‌هایی اتفاق نمی‌افتد. در واقع، مهندس معمولاً برای حل معادلات مختلف به فرمول نیاز ندارد. آنچه لازم دارد، جوابی با درجه‌ی معینی از دقت است—اینکه جواب از یک فرمول به دست آمده یا از راه دیگری حاصل شده است، برای او اهمیت چندانی ندارد.

مثلاً فرض کنید که فرمولی پیدا شده و جواب به دست آمده از آن $x = 3 + \sqrt{13}$ است. روشن است که این جواب را در عمل نمی‌توان به طور مستقیم مورد استفاده قرار داد (به سختی می‌توانید از مهندسی بخواهید که قطعه‌ای به طول $(3 + \sqrt{13})\,\text{cm}$ برایتان بسازد.) در عمل باید $\sqrt{13}$ را به صورت اعشاری بیان کرد، و تعداد ارقام اعشاری بعد از ممیز را باید به میزانی که برای مسئله‌ی مورد نظر لازم است، در نظر گرفت.

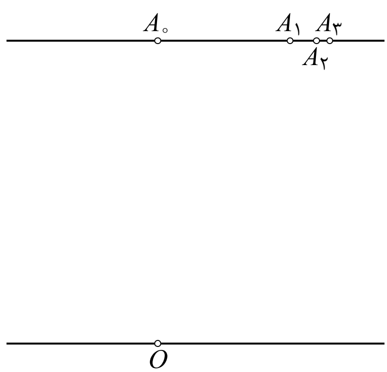
بنا بر این، اگر ریاضی‌دان مشخص کند که ریشه‌های معادله را با درجه‌ی دقت لازم چگونه می‌توان

به دست آورد، مهندس کاملاً راضی خواهد شد. ریاضیات روش‌های چندی برای حل تقریبی معادلات ایجاد کرده است. برخی از این روش‌ها در این کتاب شرح داده می‌شوند.

۲ تقریبات متوالی

اکثر روش‌های حل تقریبی معادلات مبتنی بر ایده‌ی *تقریبات متوالی* هستند. از این ایده نه فقط برای حل معادلات، بلکه برای حل شماری از مسایل عملی نیز استفاده می‌شود.

توپچی‌ها از روش تقریبات متوالی، یا روش آزمایش و خطا، استفاده می‌کنند. برای زدن یک هدف، آنها گرا و مسافت را تنظیم می‌کنند و توپ را شلیک می‌کنند. اگر به هدف نخورد، بر اساس محل مشاهده شده‌ی انفجار توپ، گرا و مسافت را اصلاح می‌کنند و گلوله‌ی بعدی توپ را شلیک می‌کنند. پس از چند تقریب، آنها موفق می‌شوند گرا و مسافت را طوری تنظیم کنند که توپ به هدف بخورد.



شکل ۱

گاه تقریب متوالی برای تعیین نقطه‌ی هدف‌گیری نیز لازم است. فرض کنید که یک توپ ضدهوایی در نقطه‌ی O به یک هواپیمای در حال پرواز شلیک می‌کند (شکل ۱). اگر وقتی که هواپیما در نقطه‌ی A_0 است، توپ به سوی آن نقطه هدف‌گیری شود، به هدف نخواهد خورد، زیرا در مدتی که گلوله‌ی توپ در راه است، هواپیما به نقطه‌ی دیگر A_1 خواهد رسید. اگر سرعت هواپیما و گلوله‌ی توپ را بدانیم، می‌توانیم این نقطه‌ی A_1 را تقریباً به سهولت پیدا کنیم. اما اگر گلوله به سوی نقطه‌ی A_1 هدف‌گیری شود، باز هم ممکن است به هدف اصابت نکند. علت آن است که کج کردن

لوله‌ی توپ، مسیر حرکت گلوله را تغییر می‌دهد، و بنا بر این، زمانی که طول می‌کشد که گلوله فاصله‌ی OA_1 را بپیماید، همان زمانی نیست که برای طی کردن فاصله‌ی OA_1 لازم است، و در نتیجه، گلوله‌ی توپ به هواپیما نخواهد خورد. ولی در حالت دوم، خطا به اندازه‌ی زمانی که هدف‌گیری روی A_0 انجام شود، نیست. برای اینکه این خطا را باز هم کمتر کنیم، باید زمانی را که طول می‌کشد تا گلوله مسافت OA_1 را طی کند، و نیز نقطه‌ای را که هواپیما در این زمان به آنجا رسیده است، محاسبه کنیم. این نقطه‌ی A_2 تقریب بعدی برای نقطه‌ی هدف‌گیری مورد نظر خواهد بود. بعد از آن می‌بایست زمان صرف شده برای رسیدن گلوله به نقطه‌ی A_2 را حساب کنیم و نقطه‌ی A_3 را که هواپیما در آن زمان به آنجا خواهد رسید، پیدا کنیم. پس از چندین تقریب، نقطه‌ی هدف‌گیری را با درجه‌ی تقریب لازم به دست خواهیم آورد.

روش تقریبات متوالی برای حل بسیاری از مسایل دیگر نیز استفاده می‌شود.

فرض کنید می‌خواهیم از چندین معدن ماسه $A_1,\dots,A_n$ به چندین محل ساخت و ساز $B_1,\dots,B_m$ ماسه حمل کنیم. فرض کنید میزان تولید معدن A_j معادل a_j تن در روز باشد، و مقدار ماسه‌ی مورد نیاز محل ساختمانی B_k معادل c_{jk} باشد (این کمیت بستگی به فاصله‌ی بین A_j و B_k، وضعیت راه‌ها، و غیره دارد).

برای اینکه برنامه‌ای برای حمل و نقل تهیه کنیم، جدول ۱ را درست می‌کنیم. در این جدول، x_{jk} نشان دهنده‌ی مقدار حمل شده از معدن A_j به محل ساختمانی B_k است.

جدول ۱

B_m	x	B_2	B_1	
x_{1m}	$\dots$	x_{12}	x_{11}	A_1
x_{2m}	$\dots$	x_{12}	x_{21}	A_2
$\vdots$	$\dots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
x_{nm}	$\dots$	x_{n2}	x_{n1}	A_n

البته اعداد x_{jk} باید در روابط زیر صدق کنند:

$$x_{j1}+x_{j2}+\cdots+x_{jm}\le a_j$$

(مقدار ماسه‌ی حمل شده از معدن A_j در روز نباید بیشتر از a_j تن باشد)

$$x_{1k}+x_{2k}+\cdots+x_{nk}=b_k$$

(محل ساختمانی B_k باید مقدار b_k تن ماسه در روز دریافت کند).

اگر برنامه‌ی ارائه شده در جدول ۱ پذیرفته شود، هزینه‌ی حمل و نقل ماسه عبارت خواهد بود از:

$$c = c_{11}x_{11} + c_{12}x_{12} + \cdots + c_{1n}x_{1n} + \\ + c_{21}x_{21} + c_{22}x_{22} + \cdots + c_{2n}x_{2n} + \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ + c_{m1}x_{m1} + c_{m2}x_{m2} + \cdots + c_{mn}x_{mn} \tag{۴}$$

برنامه باید به گونه‌ای باشد که هزینه‌ی c در کمترین حد ممکن باشد. در آغاز، یک برنامه‌ی حدسی ایجاد می‌شود. مثلاً می‌توان از روش زیر استفاده کرد.

معدن A_1 پیمانکار نزدیک‌ترین محل ساختمانی به خود می‌شود. اگر تولید ماسه‌ی این معدن، بیشتر از نیاز محل ساختمانی مذکور باشد، برای تأمین نیاز محل ساختمانی بعدی که در میان بقیه به آن معدن نزدیک‌تر است، مصرف می‌شود. پس از چند مرحله، میزان تولید معدن A_1 تمام می‌شود. بعد از آن، معدن A_2 پیمانکار نزدیک‌ترین محل ساختمانی باقیمانده می‌شود، و الخ. نهایتاً، هر محل ساختمانی دارای یک معدن پیمانکار خواهد بود.

اما چنین برنامه‌ای بهترین برنامه‌ی ممکن نخواهد بود، چرا که در پایان تعداد معدودی محل ساختمانی باقی می‌مانند که ممکن است از معدن‌های باقیمانده خیلی دور باشند. بنا بر این، مجبور خواهیم شد در برنامه تجدید نظر کنیم. برخی از قراردادها بین محل‌های ساختمانی و معدن‌ها با اعداد کوچک‌تر باید لغو شوند و محل‌های ساختمانی از معدن‌هایی با عددهای بزرگ‌تر تأمین شوند. روش‌های تغییر برنامه که منجر به کاهش هزینه‌های حمل و نقل می‌شود، در شاخه‌ای از ریاضیات به نام *برنامه‌ریزی خطی* بررسی می‌شود.*

* در مورد برنامه‌ریزی خطی، رک.
A S Solodovnikov, *Introduction to linear algebra and linear programming*, Prosveshcheniye, Moscow, 1966.

پس از چند تقریب که به کمک این روش‌ها ایجاد شود، به برنامه‌ای می‌رسیم که برای آن مجموع (۴) کمینه یا نزدیک به کمینه است.

در حالت کلی، هنگام طراحی یک برنامه، زمان‌بندی، و غیره، روش کلی این است که ابتدا با یک جواب تقریبی شروع می‌کنند و بعد به طور پیاپی آن را بهتر می‌کنند تا اینکه در نهایت جواب مورد نظر به دست آید.

ماشین‌کاری یک قطعه در کارخانه را نیز می‌توان یک فرآیند تقریب متوالی برای رسیدن به شکل مورد نظر دانست. در ابتدا یک شکل تقریبی—مثلاً یک قالب یا قطعه—انتخاب می‌شود. بعد قطعه روی دستگاه فرز تراشکاری می‌شود تا شکلی نزدیک به شکل قطعه‌ی مورد نظر به دست آید. بعد این قطعه با یک دستگاه فرز دقیق‌تر، ماشین‌کاری می‌شود. پس از چند مرحله عملیات ماشین‌کاری بر این منوال، یعنی پس از چندین تقریب، قطعه‌ی مطلوب حاصل می‌شود.

۳ آشیل و لاک‌پشت

نخستین کسی که به تقریبات متوالی اشاره کرد، زنون ایلیایی (Zeno of Elea) بود که در حدود سال ۵۰۰ ق.م. می‌زیست. این فیلسوف تلاش داشت که ثابت کند که هیچ حرکتی در طبیعت وجود ندارد. زنون برای اثبات فقدان حرکت، از استدلال زیر استفاده کرد: اگر سریع‌ترین دونده‌ی یونان، آشیل (Achilles)، بخواهد به یک لاک‌پشت برسد، در این کار موفق نخواهد شد. مثلاً فرض کنید فاصله‌ی بین آشیل و لاک‌پشت ۱۰۰۰ قدم باشد، و آشیل در هر ثانیه ۱۰ قدم می‌دود، در حالی که لاک‌پشت یک قدم می‌خزد. در ۱۰۰ ثانیه، آشیل ۱۰۰۰ قدمی را که بین او و لاک‌پشت وجود دارد، خواهد پیمود. ولی در طی این مدت، لاک‌پشت ۱۰۰ قدم طی خواهد کرد. آشیل این ۱۰۰ قدم را در ۱۰ ثانیه خواهد دوید، ولی لاک‌پشت نیز ۱۰ قدم دیگر به جلو خواهد خزید. برای طی کردن این فاصله، آشیل به یک ثانیه‌ی دیگر نیاز خواهد داشت، که در طی آن، لاک‌پشت یک قدم جلوتر خواهد رفت. لذا لاک‌پشت همیشه از آشیل جلوتر خواهد بود و او هرگز نخواهد توانست به آن برسد. بنا بر این، حرکت وجود ندارد.

البته این استدلال از طرف زنون، یک تناقض شوخ‌طبعانه بیش نیست. حرکت از خواص ذاتی ماده است.

هر دانش‌آموزی به راحتی می‌تواند محاسبه کند که آشیل کی به لاک‌پشت می‌رسد. برای این کار باید معادله‌ای به صورت زیر بنویسیم:

$$۱۰x - x = ۱۰۰, \qquad (۵)$$

که در اینجا x زمان مورد نظر است. از این معادله داریم:

$$x = \frac{۱۰۰۰}{۹}\,\mathrm{s} = ۱۱۱\,\frac{۱}{۹}\,\mathrm{s}\,,$$

که در اینجا s نشان دهنده‌ی ثانیه است.

اما استدلال زنون را می‌توان روش خاصی برای حل تقریبی معادله‌ی (۵) دانست.

در واقع، x را به طرف راست معادله ببرید و طرفین را بر ۱۰ تقسیم کنید. معادله‌ی زیر به دست می‌آید:

$$x = ۱۰۰ + \frac{x}{۱۰}. \qquad (۶)$$

اگر در طرف راست از جمله‌ی $x/۱۰$ صرف نظر کنیم (مقدار آن در مقایسه با x کوچک است)، برای x جواب تقریبی $x_۱ = ۱۰۰$ را به دست می‌آوریم. حال می‌توانیم با قرار دادن تقریب به دست آمده، یعنی $x_۱ = ۱۰۰$، به جای x در سمت راست، جواب دقیق‌تری به دست آوریم. به این ترتیب، مقدار دقیق‌تری برای x به دست می‌آید، یعنی $x_۲ = ۱۰۰ + ۱۰ = ۱۱۰$. با قرار دادن مقدار جدید در سمت راست معادله، تقریب بعدی به دست می‌آید، یعنی $x_۳ = ۱۰۰ + ۱۱۰/۱۰ = ۱۱۱$. به این روش، تقریبات زیر را به دست می‌آوریم:

$$x_۱ = ۱۰۰, x_۲ = ۱۱۰, x_۳ = ۱۱۱, x_۴ = ۱۱۱/۱, \ldots,$$

که اینها همان اعداد به دست آمده از استدلال زنون هستند. این اعداد با رابطه‌ی زیر به هم مربوط می‌شوند:

$$x_{n+۱} = ۱۰۰ + \frac{x_n}{۱۰}, \qquad (۷)$$

که بر اساس آن می‌توان آنها را به صورت متوالی محاسبه کرد. به تدریج که n افزایش می‌یابد، آنها به جواب دقیق معادله‌ی (۵)، یعنی $x = ۱۱۱\frac{۱}{۹}$ نزدیک می‌شوند.

روش حل فوق‌الذکر بدان جهت موفقیت‌آمیز بود که جمله‌ی $x/۱۰$ در مقایسه با x کوچک است. در غیر این صورت، اعدادی به دست می‌آوردیم که به جواب مورد نظر نزدیک‌تر و نزدیک‌تر نمی‌شدند. مثلاً فرض کنید که آشیل نه با یک لاک‌پشت کندرو، بلکه با یک بز کوهی تیزپا مسابقه می‌داد که در هر ثانیه ۲۰ قدم می‌دوید. برای اینکه ببینیم چقدر طول می‌کشد تا آشیل به بز کوهی برسد، باید معادله‌ی زیر را حل کنیم:

$$۱۰x - ۲۰x = ۱۰۰۰. \qquad (۸)$$

جواب آن عبارت است از $x = -۱۰۰$. معنای این مطلب آن است که آشیل و بز کوهی ۱۰۰ ثانیه قبل شانه به شانه‌ی هم بوده‌اند، و اکنون بز کوهی از آشیل جلو زده است، و هر چه می‌گذرد، فاصله‌ی بین آن دو بیشتر می‌شود.

اکنون سعی می‌کنیم معادله‌ی (۸) را با همان روش معادله‌ی (۵) حل کنیم. برای این کار، جمله‌ی $۲۰x$ را به طرف راست می‌بریم و دو طرف معادله را بر ۱۰ تقسیم می‌کنیم. معادله‌ی زیر به دست می‌آید:

$$x = ۱۰۰ + ۲x. \qquad (۹)$$

مقدار $x_۰ = ۰$ را در طرف راست قرار دهید. خواهیم داشت $x_۱ = ۱۰۰$. با قرار دادن این مقدار در طرف راست معادله‌ی (۹)، تقریب بعدی $x_۲ = ۳۰۰$ به دست می‌آید. اگر این فرآیند را ادامه دهیم،

اعداد زیر را خواهیم داشت:

$$x_{۰} = ۰, x_{۱} = ۱۰۰, x_{۲} = ۳۰۰, x_{۳} = ۷۰۰, \ldots .$$

می‌بینیم که این اعداد به جواب دقیق معادله‌ی (۸)، یعنی $x = -۱۰۰$، نزدیک نمی‌شوند.

۴ تقسیم در رایانه‌های الکترونیکی

شاید این سؤال برای خواننده مطرح شود که چرا معادله‌ی (۵) را با روش تقریبات متوالی حل کنیم، در حالی که به سادگی می‌توانیم آن را به طور دقیق حل کنیم. ولی البته خود معادله‌ی (۵) زیاد مورد علاقه‌ی ما نبود—ما به روش تقریبات متوالی علاقه‌مند بودیم که می‌خواهیم آن را در معادلات پیچیده‌تر به کار ببریم.

در ضمن، لازم به ذکر است که با ظهور رایانه‌های الکترونیکی پرسرعت، در این اواخر این ضرورت پیدا شده است که معادلاتی شبیه معادله‌ی (۵) را با روش تقریبات متوالی حل کنیم. برخی از رایانه‌ها فقط سه عمل ریاضی را می‌توانند انجام دهند: جمع، تفریق، و ضرب. غیر از اینها، می‌توانند یک عدد را بر اعدادی که به صورت ۲^n هستند، تقسیم کنند. این رایانه‌ها برای تقسیم بر اعداد دلخواه از چه روشی استفاده می‌کنند؟

تقسیم عدد b بر عدد a شامل حل معادله‌ی $ax = b$ است. از آنجا که رایانه می‌تواند ضرب و تقسیم بر ۲^n را انجام دهد، می‌توانیم فرض کنیم که $۱/۲ \leq a < ۱$ (در غیر این صورت، می‌توانیم دو طرف معادله‌ی $ax = b$ را در ۲ به توان عدد مناسب ضرب یا تقسیم کنیم.) معادله‌ی $ax = b$ را به صورت زیر بازنویسی می‌کنیم:

$$x = (۱ - a)x + b. \qquad (۱۰)$$

فرض کنید $x_۱ = b$ تقریب اول برای x باشد. خطای این تقریب را با $\alpha_۱$ نشان می‌دهیم، یعنی فرض می‌کنیم $x_۱ + \alpha_۱ = b/a$. حالا از معادله‌ی (۱۰) داریم:

$$x_۱ + \alpha_۱ = (۱ - a)(x_۱ + \alpha_۱) + b = \qquad (۱۱)$$

$$= (۱ - a)x_۱ + b + (۱ - a)\alpha_۱.$$

از آنجا که $۱/۲ \leq a < ۱$، لذا نتیجه می‌شود که

$$۰ < ۱ - a \leq ۱/۲.$$

از آنجا که ضریب $۱ - a$ نسبتاً کوچک است، لذا جمله‌ی $(۱ - a)\alpha_۱$ در سمت راست معادله‌ی (۱۱) را که بزرگ‌تر از $\alpha_۱ / ۲$ نیست، حذف می‌کنیم. خواهیم داشت:

$$x_۱ + \alpha_۱ \approx (۱ - a)x_۱ + b.$$

عدد

$$x_2 = (1-a)x_1 + b$$

به عنوان تقریب بعدی برای x در نظر گرفته می‌شود.

خطای تقریب x_2 را با α_2 نشان می‌دهیم، یعنی قرار می‌دهیم $x_2 + \alpha_2 = b/a$. بعد از معادله‌ی (۱۰) خواهیم داشت:

$$x_2 + \alpha_2 = (1-a)x_2 + b + (1-a)\alpha_2.$$

با حذف جمله‌ی $(1-a)\alpha_2$ در طرف راست این معادله، معادله‌ی تقریبی

$$x_2 + \alpha_2 \approx (1-a)x_2 + b$$

را به دست می‌آوریم. بنا بر این، می‌توانیم

$$x_3 = (1-a)x_2 + b$$

را به عنوان تقریب بعدی در نظر بگیریم. با استدلال مشابه، به تقریب بعدی

$$x_4 = (1-a)x_3 + b$$

می‌رسیم، و الی آخر. اعداد $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ که به طور متوالی از فرمول

$$x_{n+1} = (1-a)x_n + b \tag{۱۲}$$

محاسبه شده‌اند، به عدد b/a نزدیک می‌شوند. ولی این فرمول فقط از عمل‌های جمع، تفریق، و ضرب استفاده می‌کند، و معنای این مطلب آن است که کامپیوتر می‌تواند از آن برای محاسبه استفاده کند.

روش تقسیم که در بالا شرح داده شد، در حقیقت، مبتنی بر فرمول مجموع یک تصاعد هندسی نزولی نامتناهی است. در واقع، اگر کسر b/a را به صورت

$$\frac{b}{a} = \frac{b}{1-(1-a)}$$

بنویسیم، فرمول فوق‌الذکر را به دست می‌آوریم:

$$\frac{b}{1-(1-a)} = b + b(1-a) + b(1-a)^2 + \cdots + b(1-a)^{n-1} + \cdots. \tag{۱۳}$$

مجموع n جمله‌ی اول این تصاعد را با x_n نشان می‌دهیم:

$$x_n = b + b(1-a) + b(1-a)^2 + \cdots + b(1-a)^{n-1}.$$

روشن است که

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= b + b(1-a) + b(1-a)^2 + \cdots + b(1-a)^n \\ &= b + (1-a)\left[b + b(1-a) + b(1-a)^2 + \cdots + b(1-a)^{n-1}\right] \\ &= b + (1-a)x_n. \end{aligned}$$

این فرمول با فرمول (۱۲) مطابقت دارد. لذا با جایگزینی مقدار تقریبی x_n به جای کسر b/a، مجموع n جمله‌ی اول را به جای مجموع نامتناهی در فرمول (۱۳) می‌گذاریم. به تدریج که تعداد عوامل جمع، n افزایش می‌یابد، این مجموع به جمع کل تصاعد نزدیک می‌شود (تصاعد (۱۳) یک تصاعد نزولی است، زیرا $۱ > a \leq ۱/۲$ و لذا $۱/۲ \leq a - ۱ > \circ$).

۵ استخراج جذر با استفاده از روش تقریبات متوالی

در اینجا نشان می‌دهیم که چگونه می‌توان از روش تقریبات متوالی برای استخراج جذر استفاده کرد. در مدرسه، روشی آموزش داده می‌شود که با استفاده از آن می‌توان ارقام اعشاری یک جذر را یکی پس از دیگری محاسبه کرد. آن روش را نیز می‌توان روشی برای تقریب متوالی به جواب در نظر گرفت. ولی روش مذکور نسبتاً پیچیده است، و دانش‌آموزان تقریباً به طور مکانیکی از آن استفاده می‌کنند، بدون آنکه واقعاً بفهمند که چگونه کار می‌کند. در اینجا، روش دیگری را شرح می‌دهیم که در بابل (Babylon) قدیم استفاده می‌شد. هندسه‌دان یونانی، هرون اسکندریه (Hero (Heron) of Alexandria)، نیز از این روش استفاده می‌کرد. بعدها این روش فراموش شد، ولی امروزه گاه در رایانه‌های الکترونیکی از آن برای استخراج جذر استفاده می‌شود.

مثلاً فرض کنید می‌خواهیم جذر عدد ۲۸ را استخراج کنیم. ابتدا یک مقدار تقریبی این ریشه را در نظر بگیرید. مثلاً قرار می‌دهیم $x_۱ = ۵$. خطای این مقدار تقریبی را با $\alpha_۱$ نشان می‌دهیم، یعنی قرار می‌دهیم $\sqrt{۲۸} = ۵ + \alpha_۱$. برای به دست آوردن $\alpha_۱$، هر دو طرف معادله را مجذور می‌کنیم، و خواهیم داشت:

$$۲۸ = ۲۵ + ۱۰\alpha_۱ + \alpha_۱^۲,$$

یعنی

$$\alpha_۱^۲ + ۱۰\alpha_۱ - ۳ = ۰. \qquad (۱۴)$$

به این ترتیب، یک معادله‌ی درجه‌ی دوم برای $\alpha_۱$ به دست آوردیم. اگر بخواهیم این معادله را به طور دقیق حل کنیم، خواهیم داشت $\alpha = -۵ \pm \sqrt{۲۸}$. لذا برای پیدا کردن $\alpha_۱$ به طور دقیق، باید $\sqrt{۲۸}$ را حساب کنیم. به نظر می‌رسد که ما در یک دور باطل گرفتار شده‌ایم: برای به دست آوردن $\sqrt{۲۸}$، باید $\alpha_۱$ را محاسبه کنیم، و برای محاسبه‌ی $\alpha_۱$، باید $\sqrt{۲۸}$ را به دست آوریم.

در اینجا، استدلال زیر به نجات ما می‌آید. خطای $\alpha_۱$ در مقدار تقریبی $x_۱ = ۵$ بزرگ نیست، و قطعاً از واحد کوچک‌تر است. عدد $\alpha_۱^۲$ از آن هم کوچک‌تر است. بنا بر این، باید با حذف کردن جمله‌ی کوچک $\alpha_۱^۲$ در معادله‌ی (۱۴)، تلاش کنیم $\alpha_۱$ را پیدا کنیم. آنگاه برای $\alpha_۱$، معادله‌ی تقریبی $۱۰\alpha_۱ - ۳ \approx ۰$ را به دست می‌آوریم، که از آن نتیجه می‌شود $\alpha_۱ \approx ۰/۲$.

به این ترتیب، ما مقدار تقریبی تصحیح $\alpha_۱$ را به دست آوردیم. از آنجا که $\sqrt{۲۸} = ۵ + \alpha_۱$، لذا تقریب دوم $x_۲$ برای $\sqrt{۲۸}$ به صورت زیر خواهد بود:

$$x_۲ = ۵ + ۰/۳ = ۵/۳.$$

برای اینکه تقریب باز هم دقیق‌تری برای $\sqrt{۲۸}$ به دست آوریم، فرآیند فوق را تکرار می‌کنیم، یعنی خطای مقدار $x_۲ = ۵/۳$ را با $\alpha_۲$ نشان می‌دهیم، و قرار می‌دهیم $\sqrt{۲۸} = x_۲ + \alpha_۲$. با مجذور کردن دو طرف این تساوی و کنار گذاشتن جمله‌ی کوچک $\alpha_۲^۲$، داریم $۲۸ \approx x_۲^۲ + ۲x_۲\alpha_۲$، و بنا بر این

$$\alpha_۲ \approx \frac{۲۸ - x_۲^۲}{۲x_۲}.$$

این بدان معنا است که فرمول به دست آوردن تقریب سوم برای $\sqrt{۲۸}$ عبارت است از

$$x_۳ = x_۲ + \frac{۲۸ - x_۲^۲}{۲x_۲} = \frac{۲۸ + x_۲^۲}{۲x_۲}.$$

از آنجا که $x_۲ = ۵/۳$، از اینجا خواهیم داشت $x_۳ = ۵/۲۹۱۵ \ldots$. به همین ترتیب، با شروع از مقدار تقریبی $x_۳ = ۵/۲۹۱۵$، تقریب بعدی $x_۴$ را به دست می‌آوریم که با فرمول زیر بیان می‌شود:

$$x_۴ = \frac{۲۸ + x_۳^۲}{۲x_۳} = ۵/۲۹۱۵.$$

به طور کلی، اگر تقریب x_n را برای $\sqrt{۲۸}$ به دست آورده باشیم، تقریب بعدی برای آن عبارت است از

$$x_{n+۱} = \frac{۲۸ + x_n^۲}{۲x_n}. \qquad (۱۵)$$

بر این اساس، هر مرحله‌ی جدید این فرآیند، تقریب‌های باز هم دقیق‌تری را برای $\sqrt{۲۸}$ به ما می‌دهد. زمانی که تفاضل بین $x_{n+۱}$ و x_n کمتر از دقت محاسباتی تعیین شده شود، فرآیند محاسبه متوقف می‌شود. مثلاً اگر بخواهیم $\sqrt{۲۸}$ را با دقت ۰/۰۰۰۱ محاسبه کنیم، چهار تقریب کافی است و می‌توانیم قرار دهیم $\sqrt{۲۸} = ۵/۲۹۱۵$ (در واقع، $x_۳ = ۵/۲۹۱۵\ldots$ و $x_۴ = ۵/۲۹۱۵\ldots$).

همین روش را می‌توان برای استخراج جذر هر عدد صحیح مثبت دیگری به کار برد. به این صورت که برای محاسبه‌ی $\sqrt{a}$، یک مقدار تقریبی ابتدایی $x_۱$ را انتخاب می‌کنیم و بعد تقریبات بعدی را با استفاده از فرمول

$$x_{n+۱} = \frac{a + x_n^۲}{۲x_n} \qquad (۱۶)$$

محاسبه می‌کنیم.

فرمول (۱۶) را می‌توان با استدلالی کمی متفاوت با آنچه در مورد استخراج $\sqrt{۲۸}$ گفته شد، به

دست آورد. فرض کنید قبلاً تقریب n-اُم x_n را برای $\sqrt{a}$ به دست آورده‌ایم. از آنجا که $\sqrt{a} = \sqrt{x_n \cdot \frac{a}{x_n}}$، لذا نتیجه می‌شود که $\sqrt{a}$ میانگین هندسی اعداد x_n و $\frac{a}{x_n}$ است. میانگین حسابی اعداد x_n و $\frac{a}{x_n}$ را به عنوان مقدار تقریبی این میانگین هندسی در نظر می‌گیریم، یعنی قرار می‌دهیم

$$x_{n+۱} = \frac{۱}{۲}\left(x_n + \frac{a}{x_n}\right) = \frac{a + x_n^۲}{۲x_n}.$$

این همان فرمول (۱۶) است.

بنا بر این، *روش استخراج تقریبی جذر که در بالا شرح داده شد، مشتمل بر جایگزینی میانگین حسابی به جای میانگین هندسی* x_n *و* $\frac{a}{x_n}$ *در هر مرحله است.*

اکنون بحث می‌کنیم که آیا فرآیند تقریبات متوالی که برای استخراج جذر به کار گرفته شد، همیشه منجر به جواب می‌شود، یعنی وضعیت همواره مانند چیزی است که در مورد آشیل و لاک‌پشت دیدیم، یا اینکه گاه مانند زمانی است که آشیل به دنبال بز کوهی می‌دود (ریاضیدان‌ها می‌گویند که در حالت اول این فرآیند همگرا است، در حالی که در حالت دوم واگرا است). ثابت خواهیم کرد فرآیند استخراج ریشه هیچگاه دچار مشکل نمی‌شود—این فرآیند همیشه همگرا است و همیشه به جواب مطلوب منتهی می‌شود.

برای این منظور، خطاهای دو تقریب متوالی، یعنی $\alpha_n = \sqrt{a} - x_n$ و $\alpha_{n+۱} = \sqrt{a} - x_{n+۱}$ را با هم مقایسه می‌کنیم. خطای $\alpha_{n+۱}$ را می‌توان مطابق فرمول (۱۶) به صورت زیر نوشت:

$$\alpha_{n+۱} = \sqrt{a} - x_{n+۱} = \sqrt{a} - \frac{x_n^۲ + a}{۲x_n} = -\frac{x_n^۲ - ۲x_n\sqrt{a} + a}{۲x_n}.$$

اما

$$x_n^۲ - ۲x_n\sqrt{a} + a = \left(x_n - \sqrt{a}\right)^۲ = \alpha_n^۲,$$

و بنا بر این

$$\alpha_{n+۱} = -\frac{\alpha_n^۲}{۲x_n}. \qquad (۱۷)$$

ما فقط مقادیر تقریبی مثبت x_n را برای $\sqrt{a}$ در نظر می‌گیریم. بنا بر این، می‌توانیم از تساوی (۱۷) نتیجه‌گیری کنیم که همه‌ی خطاهای $\alpha_۲, \alpha_۳, \ldots, \alpha_n, \ldots$ منفی هستند. به عبارت دیگر، *تمام تقریبات از تقریب دوم به بعد، تقریبات اضافی هستند؛*[*] تقریب اول $x_۱$ ممکن است اضافی یا نقصانی باشد.

[*] توضیح آن این است که میانگین حسابی همیشه از میانگین هندسی بزرگ‌تر است.

به کمک فرمول (۱۷)، به آسانی می‌توان ثابت کرد که قدر *مطلق خطا* در مقدار *تقریبی* x_n، *با هر*

مرحله *لااقل دو برابر کوچک‌تر* می‌شود. در واقع، تساوی (۱۷) را می‌توان به صورت زیر بازنویسی کرد:

$$\alpha_{n+1} = -\frac{\alpha_n}{2x_n}\alpha_n = \frac{x_n - \sqrt{a}}{2x_n}\alpha_n = \left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{a}}{2x_n}\right)\alpha_n.$$

بنا بر این،

$$|\alpha_{n+1}| = \left|\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{a}}{2x_n}\right||\alpha_n|. \qquad (18)$$

ولی از آنجا که $x_n > 0$، نتیجه می‌شود که

$$\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{a}}{2x_n} < \frac{1}{2}.$$

از سوی دیگر، به طوری که در بالا نشان داده شد، برای $n \geq 2$ داریم $x_n > \sqrt{a}$، و بنا بر این،

$$\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{a}}{2x_n} > 0.$$

این منجر به نامعادله‌ی

$$\left|\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{a}}{2x_n}\right| < \frac{1}{2} \qquad (19)$$

می‌شود. با مقایسه‌ی رابطه‌های (۱۸) و (۱۹)، می‌بینیم که

$$\alpha_{n+1} < \frac{1}{2}\alpha_n.$$

این درستی جمله‌ی ما را ثابت می‌کند: با هر مرحله، قدر مطلق خطا به کمتر از نصف مقدار قبلی کاهش می‌یابد. این بدان معنا است که پس از مرحله‌ی دوم تقریب، خطا از نظر قدر مطلق به کمتر از یک چهارم مقدار اولیه‌ی آن کاهش خواهد یافت، پس از مرحله‌ی سوم به کمتر از یک هشتم، و الی آخر. روشن است که هر چه n بزرگ‌تر می‌شود، قدر مطلق خطا $\alpha_n = \sqrt{a} - x_n$ کاهش یافته و به سمت صفر میل می‌کند. ولی این بدان معنا است که وقتی که n بزرگ‌تر می‌شود، x_n به سمت $\sqrt{a}$ میل می‌کند.

اکنون ببینیم که انتخاب تقریب اولیه‌ی x_1 چه تأثیری بر فرآیند تقریب دارد. اولاً توجه کنید که این انتخاب مطلقاً هیچ تأثیری بر نتیجه‌ی نهایی ندارد، چرا که قبلاً ثابت کردیم که صرف نظر از اینکه تقریب اولیه‌ی x_1 چه عددی انتخاب شود، خطاهای $\alpha_2, \ldots, \alpha_n, \ldots$ تقریب‌های بعدی، وقتی که $n \to \infty$، به سمت صفر میل می‌کند. لذا اگر دقت محاسباتی لازم تعیین شود، برای تمام تقریب‌های اولیه‌ی x_1، مقدار یکسانی برای $\sqrt{a}$ در محدوده‌ی دقت لازم به دست خواهد آمد. حتی اگر انتخاب تقریب اولیه خیلی بد انجام شود، در نهایت، به جواب درست دست خواهیم یافت. پس از

ده مرحله‌ی تقریب، قدر مطلق خطا لااقل هزار بار $(1000 \approx 1024 = 2^{10})$ کاهش خواهد یافت و پس از چهل بار تقریب، یک میلیارد (10^{12}) بار کاهش خواهد یافت. پس اگر هنگام محاسبه‌ی $\sqrt{2}$، قرار دهیم $x_1 = 10^6$، به طوری که $\alpha_1 \approx 10^6$، آنگاه $|\alpha_{40}| < 10^{-6}$. به عبارت دیگر، در آغاز فرآیند، خطا حدود یک میلیون بود و در پایان، قدر مطلق آن کمتر از یک میلیونیم است.

با این وجود، انتخاب تقریب اولیه بر طول فرآیند تقریب تأثیر می‌گذارد. اگر تقریب اولیه نامناسب باشد، باید مدت زیادی صبر کنیم تا به جایی برسیم که اختلاف بین x_{n+1} و x_n از دقت محاسباتی تعیین شده کوچک‌تر شود. انتخاب خوب تقریب اولیه، فرآیند را تسریع می‌کند. لذا غالباً به این صورت عمل می‌شود که تقریب اولیه از جداول جذر استخراج می‌شود و سپس از فرمول

$$x_2 = \frac{a + x_1^2}{2x_1} \tag{20}$$

تنها برای به دست آوردن یک مقدار دقیق‌تر استفاده می‌شود.

این روش خصوصاً بدان جهت مناسب است که سرعت کاهش خطا وقتی که x_n به $\sqrt{a}$ نزدیک می‌شود، بسیار بالاتر است. علت این امر آن است که در به دست آوردن نامعادله‌ی

$$|\alpha_{n+1}| < \frac{1}{2}|\alpha_n|,$$

ما عدد $\frac{1}{2}$ را جایگزین ضریب $\left|\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{a}}{2x_n}\right|$ در فرمول (۱۸) کرده‌ایم. با این حال، اگر x_n به $\sqrt{a}$ نزدیک باشد، کسر $\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{a}}{2x_n}$ بسیار کوچک است و بنا بر این، $|\alpha_{n+1}| = \left|\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{a}}{2x_n}\right||\alpha_n|$ بسیار کوچک‌تر از $\frac{1}{2}|\alpha_n|$ است.

این را می‌توان دقیق‌تر بیان کرد. برای این منظور، به همراه خطای مطلق $|\alpha_n| = |\sqrt{a - x_n}|$، خطای نسبی β_n را نیز برای مقدار تقریبی x_n در نظر بگیرید، که عبارت از نسبت خطای مطلق $|\alpha_n|$ به مقدار دقیق ریشه‌ی $\sqrt{a}$ است. این خطا با فرمول زیر بیان می‌شود:

$$\beta_n = \frac{|\alpha_n|}{\sqrt{a}} = \left|1 - \frac{x_n}{\sqrt{a}}\right|.$$

فرمول زیر را برای کمیت β_{n+1} می‌توان از معادله‌ی (۱۷) به دست آورد:

$$\beta_{n+1} = \frac{|\alpha_{n+1}|}{\sqrt{a}} = \frac{|\alpha_n|^2}{2x_n\sqrt{a}}.$$

از آنجا که $x_n > \sqrt{a}$، نتیجه می‌شود که

$$\beta_{n+1} < \frac{|\alpha_n|^2}{2(\sqrt{a})^2} = \frac{1}{2}\beta_n^2.$$

بنا بر این، خطاهای نسبی β_n در نامعادله‌ی

$$\beta_{n+1} < \frac{\beta_n^2}{2} \qquad (21)$$

صدق می‌کنند. برای نمونه، اگر خطای نسبی تقریب x_n برابر با ۰٫۰۱ باشد، برای x_{n+1} از ۰٫۰۰۰‘۰۵ و برای x_{n+2} از ۰٫۰۰۰‘۰۰۰‘۰۰۰‘۱۳ بیشتر نخواهد بود. می‌بینیم که دقت محاسبات با سرعتی فزاینده افزایش می‌یابد. می‌توان نشان داد که وقتی که به $\sqrt{a}$ خیلی نزدیک هستیم، هر تقریب متوالی، تعداد ارقام معنی‌دار صحیح را دو برابر می‌کند.

مثال: مقدار $\sqrt{238}$ را با دقت ۰٫۰۰۰‘۰۱ محاسبه کنید.

از جدول ریشه‌های دوم، می‌بینیم که $\sqrt{238} = 15.43$. قرار دهید $x_1 = 15.43$، و x_2 را با استفاده از فرمول زیر پیدا کنید:

$$x_2 = \frac{15.43^2 + 238}{30.86} = 15.42725\ldots.$$

درستی جواب به دست آمده را آزمایش کنید. از آنجا که خطای مقدار ۱۵٫۴۳ از ۰٫۰۱ بیشتر نیست، لذا $\alpha_1 = 0.01$، و بنا بر این،

$$\beta_1 \approx \frac{0.01}{15.43} < 0.001.$$

ولی در این حالت،

$$\beta_2 < \frac{0.001^2}{2} = 0.000'000'5.$$

معنای این مطلب آن است که خطای مطلق تقریب x_2، از مقدار $15.43 \times 0.000'000'5 <$ ۰٫۰۰۰‘۰۱ بیشتر نیست. به عبارت دیگر، تمام هفت رقم مقدار $\sqrt{238} = 15.427'25$ صحیح هستند.

اگر می‌خواستیم چهارده رقم صحیح داشته باشیم، می‌توانستیم نتیجه‌ی لازم را تنها از تقریب سوم به دست آوریم. ولی به ندرت نیاز به چنین سطح دقتی وجود دارد.

در پایان، یک ویژگی روش تقریبات متوالی را ذکر می‌کنیم. وقتی که از روش معمول به دست آوردن ریشه‌ی دوم استفاده می‌کنیم، اگر در هر مرحله خطایی اتفاق بیفتد، تمام محاسبات بعدی بی‌اعتبار می‌شود. اما وقتی از روش تقریبات متوالی استفاده شود، وضع فرق می‌کند. فرض کنید که در تقریب n-اُم به جای مقدار صحیح x_n، مقدار اشتباه y_n حاصل شده باشد. در این حالت، تمام محاسبات بعدی را می‌توان به عنوان محاسبات $\sqrt{a}$ با تقریب اولیه‌ی y_n در نظر گرفت. ولی قبلاً دیدیم که روش تقریبات متوالی فوق، صرف نظر از مقدار اولیه‌ی انتخاب شده، ما را به سوی مقدار

صحیح $\sqrt{a}$ با سطح دقت لازم هدایت می‌کند. لذا خطایی که کرده‌ایم، در نهایت، به سمت صفر میل خواهد کرد. تنها تأثیر آن این است که ما را مجبور می‌کند چند مرحله‌ی تقریب بیشتر انجام دهیم. به خاطر این ویژگی روش تقریبات متوالی، محاسبات را می‌توان با دقت پایین شروع کرد، و دقت تعیین شده را تنها برای تقریبات انتهایی به کار برد. این زمان لازم برای محاسبات را کوتاه‌تر می‌کند.

۶ استخراج ریشه با اندیس صحیح مثبت با استفاده از روش تقریبات متوالی

روش استخراج ریشه‌ی دوم که در بالا شرح داده شد، برای استخراج سایر ریشه‌های با اندیس صحیح مثبت نیز قابل استفاده است. برای این منظور، به فرمول*

$$(x+\alpha)^{k} = x^{k} + kx^{(k-۱)}\alpha + \cdots \tag{۲۲}$$

احتیاج داریم، که در اینجا سه‌نقطه نشان دهنده‌ی جملاتی است که حاوی $\alpha^{۲}$، $\alpha^{۳}$، و غیره هستند.

* این فرمول از قضیه‌ی دوجمله‌ای نتیجه می‌شود، ولی ما لازم نمی‌دانیم که خواننده با این قضیه آشنا باشد.

اجازه بدهید این فرمول را ثابت کنیم. از درس ریاضیات مدرسه می‌دانیم که

$$(x+\alpha)^{۲} = x^{۲} + ۲x\alpha + \alpha^{۲},$$

$$(x+\alpha)^{۳} = x^{۳} + ۳x^{۲}\alpha + ۳x\alpha^{۲} + \alpha^{۳}.$$

این معادلات را می‌توان به صورت زیر بازنویسی کرد:

$$(x+\alpha)^{۲} = x^{۲} + ۲x\alpha + \cdots, \tag{۲۳}$$

$$(x+\alpha)^{۳} = x^{۳} + ۳x^{۲}\alpha + \cdots. \tag{۲۴}$$

لذا، فرمول (۲۲) برای $k=۲$ و $k=۳$ ثابت شده است. اکنون دو طرف فرمول (۲۲) را در $x+\alpha$ ضرب می‌کنیم. خواهیم داشت:

$$(x+\alpha)^{۴} = \left(x^{۳} + ۳x^{۲}\alpha + \cdots\right)(x+\alpha).$$

اگر از این معادله پرانتزها را بر داریم، یک جمله‌ی $x^{۴}$ خواهیم داشت که حاوی α نیست، و دو جمله‌ی $۳x^{۳}\alpha$ و $x^{۳}\alpha$ که حاوی α به توان یک است؛ جملات بعدی حاوی α به توان دو و بالاتر هستند. بنا بر این، می‌توانیم بنویسیم:

$$(x+\alpha)^{۴} = x^{۴} + ۳x^{۳} + x^{۳}\alpha + \cdots = x^{۴} + ۴x^{۳} + \cdots \tag{۲۵}$$

(در اینجا هم مانند قبل، سه‌نقطه نشان دهنده‌ی جملات حاوی $\alpha^{۲}$ و $\alpha^{۳}$ و غیره است).

بنا بر این، فرمول (۲۲) برای $k=۴$ نیز ثابت شد. به همین ترتیب، از (۲۵) داریم:

$$(x+\alpha)^{۴} = x^{۵} + ۵x^{۴} + \cdots \tag{۲۶}$$

روشن است که بر همین اساس، می‌توانیم فرمول (۲۲) را برای هر توان صحیح مثبت k ثابت کنیم.

حالا به مسئله‌ی استخراج ریشه k-اُم باز می‌گردیم، که در اینجا k یک عدد صحیح مثبت است. فرض کنید که برای ریشه‌ی مورد نظر $\sqrt[k]{a}$، یک تقریب x_1 پیدا شده است. خطای این تقریب را با α_1 نشان می‌دهیم، یعنی فرض می‌کنیم که $x_1 + \alpha_1 = \sqrt[k]{a}$. آنگاه $(x_1 + \alpha_1)^k = a$. ولی با استفاده از فرمول (۲۲) می‌توانیم این معادله را به صورت زیر بنویسیم:

$$x_1^k + kx_1^{k-1}\alpha_1 + \cdots = a,$$

که در اینجا سه‌نقطه نشان دهنده‌ی جملات حاوی α_1^2 و α_1^3 و غیره است.

اگر تقریب انتخاب شده‌ی x_1 به قدر کافی به $\sqrt[k]{a}$ نزدیک باشد، خطای α_1 این تقریب کوچک خواهد بود و خواهیم توانست از جملات حاوی توان‌های بالاتر این خطا چشم‌پوشی کنیم. لذا تساوی تقریبی زیر را به دست می‌آوریم:

$$x_1^k + kx_1^{k-1}\alpha_1 \approx a.$$

از این تساوی نتیجه می‌شود که

$$\alpha_1 \approx \frac{a - x_1^k}{kx_1^{k-1}},$$

و لذا به عنوان تقریب بعدی $\sqrt[k]{a}$، می‌توانیم عدد

$$x_2 = x_1 + \frac{a - x_1^k}{kx_1^{k-1}} = \frac{a + (k-1)x_1^k}{kx_1^{k-1}}.$$

را انتخاب کنیم.

به همین طریق، با استفاده از تقریب x_2، می‌توانیم تقریب بعدی

$$x_3 = \frac{a + (k-1)x_2^k}{kx_2^{k-1}}.$$

را پیدا کنیم. در حالت کلی، اگر تقریب x_n برای $\sqrt[k]{a}$ یافته شده باشد، آنگاه تقریب بعدی از فرمول زیر به دست می‌آید:

$$x_{n+1} = \frac{a + (k-1)x_n^k}{kx_n^{k-1}}. \qquad (۲۷)$$

همانند حالت مربوط به استخراج ریشه، می‌توان نشان داد که فرآیند فوق برای هر تقریب اولیه‌ی x_1، همگرا می‌شود مشروط بر آنکه این تقریب یک عدد مثبت باشد. به عبارت دیگر، برای هر x_1 انتخاب شده، اعداد $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ به سمت $\sqrt[k]{a}$ میل می‌کنند. فرآیند تقریب ادامه پیدا می‌کند تا آنکه اعداد x_n و x_{n+1} با دقت مورد نظر، بر هم منطبق باشند.

مثال: مقدار $\sqrt[3]{۹۷۰}$ را با دقت ۰٫۰۰۱ به دست آورید. برای $k = ۳$، فرمول تقریب (۲۷) به شکل

زیر در می‌آید:

$$x_{n+1} = \frac{a + ۲x_n^۳}{kx_n^۲}. \qquad (۲۸)$$

در اینجا داریم $a = ۹۷۰$. قرار دهید $x_۱ = ۱۰$. از فرمول (۲۸) نتیجه می‌شود که

$$x_۲ = \frac{۹۷۰ + ۲ \times ۱۰^۳}{۳ \times ۱۰^۲} = \frac{۲۹۷۰}{۳۰۰} = ۹/۹۰۰,$$

$$x_۳ = \frac{۹۷۰ + ۲ \times ۹/۹^۳}{۳ \times ۹/۹^۲} = \frac{۲۹۱۰/۶۰}{۲۹۴/۰۳} = ۹/۸۹۹.$$

می‌بینیم که مقادیر $x_۲$ و $x_۳$ در سطح دقت تعیین شده بر هم منطبق هستند. بنا بر این، با دقت ۰/۰۰۱ داریم:

$$\sqrt[۳]{۹۷۰} = ۹/۸۹۹.$$

۷ روش تکرار

تمام مثال‌هایی که در بالا ذکر کردیم، موارد خاصی از یک روش عمومی برای حل معادلات هستند. این روش، *روش تکرار* یا *روش تقریبات متوالی* نامیده می‌شود. اساس این روش به صورت زیر است.
معادله‌ی $f(x) = ۰$ را که باید حل شود، به صورت زیر بازنویسی می‌کنیم:

$$x = \varphi(x). \tag{۲۹}$$

آنگاه تقریب اولیه‌ی $x_۱$ انتخاب و در سمت راست (۲۹) جایگزین می‌شود. مقدار $x_۲ = \varphi(x_۱)$ که به این صورت به دست می‌آید، به عنوان تقریب دوم برای ریشه در نظر گرفته می‌شود. به طور کلی، اگر تقریب x_n به دست آمده باشد، تقریب بعدی $x_{n+۱}$ از فرمول

$$x_{n+۱} = \varphi(x_n)$$

به دست می‌آید.
فرض کنید که پس از چندین تقریب، تساوی $x_n \approx x_{n+۱}$ در محدوده‌ی دقت تعیین شده تأمین شود. از آنجا که $x_{n+۱} = \varphi(x_n)$، لذا این بدان معنا است که معادله‌ی $x_n \approx \varphi(x_n)$ نیز در محدوده‌ی آن دقت تأمین می‌شود، یعنی x_n مقدار تقریبی ریشه‌ی معادله‌ی $x = \varphi(x)$ است.
مثلاً در حل مسئله‌ی آشیل و لاک‌پشت، معادله‌ی

$$۱۰x - x = ۱۰۰۰$$

را به صورت

$$x = ۱۰۰ + \frac{x}{۱۰}$$

نوشتیم و تقریب‌ها را به صورت

$$x_{n+۱} = ۱۰۰ + \frac{x_n}{۱۰}$$

جستجو کردیم. در مسئله‌ی مربوط به تقسیم در کامپیوتر الکترونیکی، معادله‌ی

$$ax = b$$

را به صورت

$$x = (1-a)x + b$$

نوشتیم و تقریب‌ها را از فرمول

$$x_{n+1} = (1-a)x_n + b$$

به دست آوردیم. و بالاخره، برای استخراج ریشه‌ی k-اُم، معادله‌ی

$$x^k = a$$

را به

$$x = \frac{a + (k-1)x^k}{kx^{k-1}}$$

تبدیل کردیم و سپس تقریب‌ها را با استفاده از فرمول

$$x_{n+1} = \frac{a + (k-1)x_n^k}{kx_n^{k-1}}$$

به دست آوردیم.

در اینجا مثالی از یک معادله‌ی پیچیده‌تر ارائه می‌کنیم که می‌توان آن را با روش تکرار حل کرد.

مثال: معادله‌ی

$$10x - 1 - \cos x = 0 \qquad (30)$$

را با دقت ۰٫۰۰۱ حل کنید.

معادله‌ی (۳۰) را به شکل زیر بازنویسی کنید:

$$x = \frac{1 + \cos x}{10}. \qquad (31)$$

یک تقریب اولیه را انتخاب کنید، مثلاً $x_1 = 0$، و آن را در طرف راست معادله‌ی (۳۱) جایگزین کنید. مقدار به دست آمده،

$$x_2 = \frac{1 + \cos 0}{10} = 0{,}2,$$

به عنوان تقریب دوم ریشه‌ی مورد نظر استفاده خواهد شد. با جایگزین کردن مقدار x_2 در سمت راست معادله‌ی (۳۱)، تقریب سوم را به دست می‌آوریم:

$$x_3 = \frac{1 + \cos 0{,}2}{10} \approx 1 + \frac{0{,}98}{10} = 0{,}198,$$

و بعد داریم:

$$x_4 = \frac{1 + \cos 0{,}198}{10} \approx 0{,}198.$$

می‌بینیم که تساوی $x_۴ = x_۳$ با دقت ۰/۰۰۱ تأمین می‌شود. از آنجا که $x_۴ = \frac{۱+\cos x_۳}{۱۰}$، معنای این مطلب آن است که، تا دقت ۰/۰۰۱، این عدد $x_۳ = ۰/۱۹۸$ ریشه‌ی معادله‌ی $x = \frac{۱+\cos x}{۱۰}$ است.

در رابطه با روش تکرار، چندین سؤال مطرح می‌شود:

۱. آیا دنباله‌ی $x_۱, \dots, x_n, \dots$ که با روش تکرار به دست آمده است، همواره به یک عدد ξ همگرا می‌شود؟

۲. اگر تساوی $\lim_{n\to\infty} x_n = \xi$ درست باشد، آیا عدد ξ جوابی برای معادله‌ی $x = \varphi(x)$ است؟

۳. اعداد $x_۱, \dots, x_n, \dots$ با چه سرعتی به ریشه‌ی معادله‌ی $x = \varphi(x)$ نزدیک می‌شوند؟

پاسخ به سؤال دوم از بقیه آسان‌تر است. فرض کنید اعداد $x_۱, \dots, x_n, \dots$ به عدد ξ نزدیک می‌شوند. تساوی $x_{n+۱} = \varphi(x_n)$ را در نظر بگیرید، که تقریب بعدی را بر حسب تقریب قبلی بیان می‌کند. وقتی که n افزایش می‌یابد، طرف چپ آن به ξ نزدیک می‌شود و طرف راست آن به $\varphi(\xi)$ نزدیک می‌شود.* لذا در حد خواهیم داشت $\xi = \varphi(\xi)$، یعنی ξ ریشه‌ی معادله‌ی $x = \varphi(x)$ است.

* فرض می‌کنیم که $\varphi(x)$ یک تابع پیوسته است.

جواب سؤال اول منفی است. در واقع، به عنوان یک مثال، معادله‌ی

$$x = ۱۰^x - ۲$$

را در نظر بگیرید. اگر قرار دهیم $x_۱ = ۱$، خواهیم داشت

$$x_۲ = ۸, \quad x_۳ = ۱۰^۸ - ۲, \quad \dots .$$

با افزایش n، اعداد x_n نیز افزایش می‌یابند، ولی به سوی هیچ حدی میل نمی‌کنند. از سوی دیگر، اگر معادله را به شکل $x = \log(x+۲)$ بازنویسی کنیم، فرآیند تقریب همگرا خواهد شد و پس از سه تقریب خواهیم داشت $x = ۲/۳۸$.

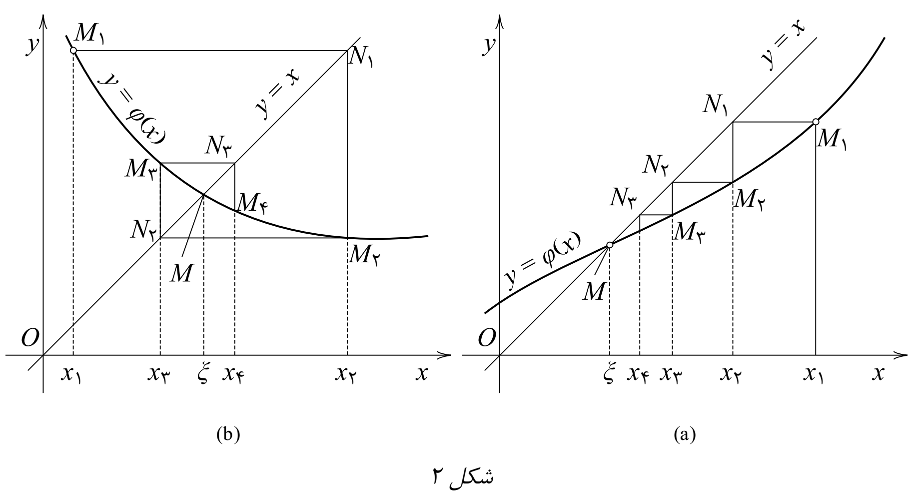
بنا بر این، به جای سؤال اول، باید سؤال زیر را بپرسیم:

چه شکلی از تابع $\varphi(x)$، همگرایی دنباله‌ی اعداد $x_۱, x_۲, \dots, x_n, \dots$ را تضمین می‌کند؟

قبل از پرداختن به این سؤال، در باره‌ی تفسیر هندسی روش تکرار بحث خواهیم کرد.

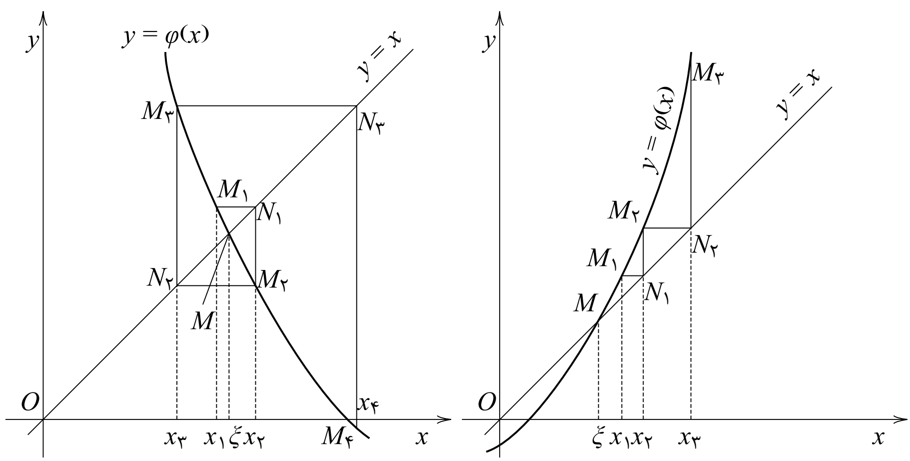
۸ معنای هندسی روش تکرار

روشن است که پیدا کردن ریشه‌ی ξ معادله‌ی $x=\varphi(x)$ درست به معنای یافتن طول نقطه‌ی M یعنی محل تقاطع منحنی $y=\varphi(x)$ با خط راست $y=x$ است. فرض کنید یک مقدار اولیه‌ی x_1 داریم (شکل ۲). در این مورد، نقطه‌ی M_1 با مختصات $M_1\left(x_1,\varphi(x_1)\right)$ روی منحنی $y=\varphi(x)$ قرار دارد. یک خط افقی بر این نقطه بکشید. این خط، خط راست $y=x$ را در نقطه‌ی $N_1\left(\varphi(x_1),\varphi(x_1)\right)$ قطع می‌کند. $\varphi(x_1)$ را با x_2 نشان دهید. آنگاه مختصات نقطه‌ی N_1 به صورت $N_1(x_2,x_2)$ خواهد بود. بعد یک خط عمودی بر نقطه‌ی N_1 بکشید. این خط منحنی $y=\varphi(x)$ را در نقطه‌ی M_2 با مختصات $M_2\left(x_2,\varphi(x_2)\right)$ قطع می‌کند. با تکرار این فرآیند، نقطه‌ی N_2 را بر روی خط راست $y=x$ با مختصات $N_2(x_3,x_3)$ به دست می‌آوریم، که در اینجا $x_3=\varphi(x_2)$، بعد نقطه‌ی M_3 را روی منحنی $y=\varphi(x)$ با مختصات $M_3\left(x_3,\varphi(x_3)\right)$ به دست می‌آوریم، و الی آخر. اگر فرآیند تقریب همگرا باشد، نقطه‌های $M_1,M_2,\ldots,M_n,\ldots$ به نقطه‌ی تقاطع مورد نظر نزدیک خواهند شد.



شکل ۲

لذا معنای هندسی روش تقریبات متوالی آن است که ما در امتداد یک خط شکسته که رئوس آن به نوبت روی منحنی و خط راست قرار دارند و پاره‌های آن به نوبت افقی و عمودی هستند، به سمت نقطه‌ی تقاطع منحنی و خط راست حرکت می‌کنیم (شکل ۲a).
اگر منحنی و خط راست به صورتی که در شکل ۲a نشان داده شده است، قرار گرفته باشند، آنگاه این خط شکسته مانند یک پلکان به نظر می‌رسد. اما اگر منحنی و خط راست به صورت نشان داده شده در شکل ۲b باشند، آنگاه خط شکسته مانند یک مارپیچ خواهد بود.
فرآیند تقریبات متوالی که در بالا شرح داده شد، ممکن است واگرا باشد و به هیچ نتیجه‌ای منجر نشود (کما اینکه در مسئله‌ی آشیل و بز کوهی چنین بود). از نظر تصویری، معنای این امر آن است که پله‌های نردبان (یا مارپیچ) بزرگ‌تر و بزرگ‌تر می‌شوند و به این خاطر، نقطه‌های $M_۱, M_۲, \ldots, M_n, \ldots$ به جای اینکه به نقطه‌ی M نزدیک‌تر شوند، از آن دور می‌شوند (شکل ۳).



(b) (a)

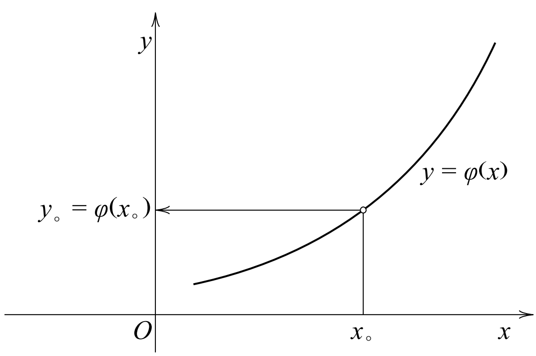
شکل ۳

تفاوت بین شکل ۲ و شکل ۳ به این شرح است. یک خط راست با شیب ۱۳۵° نسبت به محور x از نقطه‌ی M محل تقاطع خط راست $y = x$ و منحنی $y = \varphi(x)$ بکشید. این خط راست، به همراه خط $y = x$، صفحه را به چهار ربع تقسیم می‌کند. اگر منحنی در مجاورت نقطه‌ی M در ربع‌های چپ و راست صفحه واقع شده باشد، و اگر تقریب اولیه از این منطقه اتخاذ شود، آنگاه فرآیند تکرار همگرا خواهد شد. از سوی دیگر، اگر منحنی در ربع‌های بالا و پایین صفحه واقع شده باشد، فرآیند واگرا خواهد بود.
با این حال، برای استفاده از این قاعده ابتدا باید نمودار تابع $y = \varphi(x)$ را رسم کرد، ولی این کار

همیشه به آسانی میسر نیست. بنا بر این، باید آزمون همگرایی دیگر تعبیه کرد، تا بتوان همگرا (یا واگرا) بودن را به طور تحلیلی بدون ساخت‌های هندسی تعیین کرد. در مورد این آزمون در فصل ۱۰ بحث خواهیم کرد. ولی نخست باید با مفهوم نگاشت انقباضی آشنا شویم.

۹ نگاشت‌های انقباضی

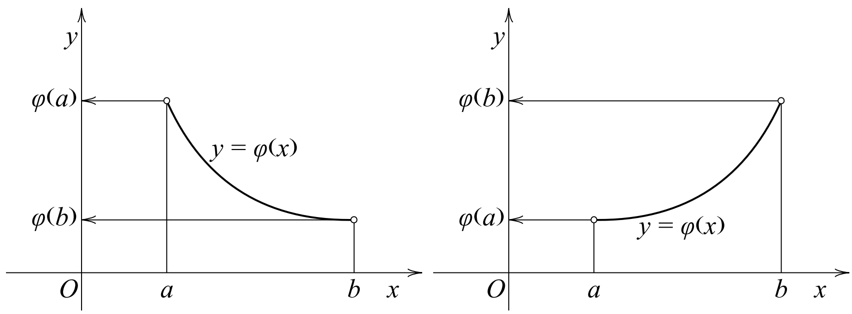
تابع $y=\varphi(x)$ را که روی بازه‌ی $[a,b]$ تعریف شده است، در نظر بگیرید. به این ترتیب، برای هر نقطه‌ی $x_\circ$ از این بازه، یک نقطه‌ی متناظر $y_\circ$ روی محور y وجود دارد، یعنی نقطه‌ی $y_\circ=\varphi(x_\circ)$. برای ترسیم این نقطه، باید یک خط عمودی از نقطه‌ی $x_\circ$ روی محور x بکشیم تا نمودار تابع $y=\varphi(x)$ را قطع کند، و بعد از نقطه‌ی تقاطع یک خط افقی بکشیم تا محور y را قطع کند (شکل ۴). بنا بر این، تابع $y=\varphi(x)$ یک نگاشت از بازه‌ی $[a,b]$ به محور y ایجاد می‌کند. مجموعه‌ی تمام نقاط روی محور y که متناظر با نقطه‌های بازه‌ی $[a,b]$ هستند، *تصویر بازه* نامیده می‌شوند. مثلاً تصویر بازه‌ی $[۲,۵]$ تحت نگاشت $y=x^۲$، بازه‌ی $[۴,۲۵]$ است، و تصویر بازه‌ی $[-۱,۶]$ تحت همان نگاشت، بازه‌ی $[۰,۳۶]$ است (نمودار تابع $y=x^۲$ را رسم کنید). می‌توان ثابت کرد که اگر تابع $y=\varphi(x)$ روی بازه‌ی $[a,b]$ پیوسته باشد، آنگاه تصویر این بازه نیز یک بازه روی محور y خواهد بود. همچنین، اگر تابع $y=\varphi(x)$ یک تابع یکنوای صعودی باشد، آنگاه تصویر بازه‌ی $[a,b]$، بازه‌ی $[\varphi(a),\varphi(b)]$ است، در حالی که اگر یک تابع یکنوای نزولی باشد، تصویر آن بازه‌ی $[\varphi(b),\varphi(a)]$ خواهد بود (شکل ۵).



شکل ۴

به جای اینکه نگاشت بازه‌ی $[a,b]$ به محور y را در نظر بگیریم، می‌توانیم نگاشت آن به محور x را

در نظر بگیریم. برای این منظور، پس از نگاشت بازه به محور y، محور y را در جهت عقربه‌های ساعت ۹۰° بچرخانید. در نتیجه‌ی این کار، نقطه‌های بازه‌ی $[a,b]$ ابتدا روی نقاطی بر روی محور y و سپس روی نقاطی بر روی محور x نگاشت خواهند شد. به این طریق، تابع $\varphi(x)$ نگاشتی از بازه‌ی $[a,b]$ به محور x ایجاد می‌کند. این نگاشت را به صورت زیر نشان می‌دهیم: $x \to \varphi(x)$. اگر تابع $\varphi(x)$ پیوسته باشد، در نتیجه‌ی این نگاشت یک بازه روی محور x به دست می‌آوریم.



(b) (a)

شکل ۵

شاید اتفاق بیفتد که $[a_۱,b_۱]$، تصویر بازه‌ی $[a,b]$، خود بخشی از $[a,b]$ باشد. مثلاً تحت نگاشت $y = x + ۱$، بازه‌ی $[۰,۴]$ به بخشی از این بازه، یعنی بازه‌ی $[۱,۳]$ نگاشت می‌شود. در چنین مواردی، می‌گوییم که $\varphi(x)$ بازه‌ی $[a,b]$ را به یک زیربازه نگاشت می‌کند. اگر $\varphi(x)$ بازه‌ی $[a,b]$ را به زیربازه‌ی $[a_۱,b_۱]$ نگاشت کند، آنگاه هر زیربازه‌ی $[a,b]$ به یک زیربازه‌ی $[a_۱,b_۱]$ نگاشت می‌شود. به طور خاص، خود بازه‌ی $[a_۱,b_۱]$ نیز توسط $\varphi(x)$ به یک زیربازه‌ی $[a_۲,b_۲]$ نگاشت خواهد شد. به همان ترتیب، تحت این نگاشت، بازه‌ی $[a_۲,b_۲]$ به یک زیربازه‌ی $[a_۳,b_۳]$ نگاشت می‌شود، و الی آخر. در نتیجه، دستگاهی از بازه‌ها به دست می‌آوریم،

$$[a,b],[a_۱,b_۱],\ldots,[a_n,b_n],\ldots,$$

که هر یک از آنها زیربازه‌ای از بازه‌ی قبلی است، و $[a_{n+۱},b_{n+۱}]$ تصویر $[a_n,b_n]$ تحت نگاشت $\varphi(x)$ است.

برای نمونه، نگاشت $x \to ۱ - \frac{۱}{x+۲}$ بازه‌ی $[۰,۴]$ را به زیربازه‌ی آن، $[۱/۲,۵/۶]$ نگاشت می‌کند. با اعمال این نگاشت بر بازه‌ی $[۱/۲,۵/۶]$، بازه‌ی $[۳/۵,۱۱/۱۷]$ حاصل می‌شود، و الی آخر. هر بازه‌ی متوالی در درون بازه‌ی قبلی واقع است.

دو حالت امکان دارد: یا یک بازه‌ی $[c,d]$ وجود دارد که در همه‌ی بازه‌های $[a_n,b_n]$ مشترک است، و یا اینکه این بازه‌ها فقط یک نقطه‌ی مشترک ξ دارند. در حالت اخیر، می‌گوییم که دستگاه

بازه‌های $[a_n, b_n]$ به یک *نقطه‌ی* ξ *منقبض می‌شود.*

در زیر، شرایط لازم را برای اینکه دستگاه بازه‌های $[a,b], [a_۱, b_۱], \ldots, [a_n, b_n], \ldots$ به یک نقطه منقبض شود، فرمول‌بندی می‌کنیم. برای این منظور، ابتدا مفهوم مهم انقباض را معرفی می‌کنیم. نگاشت $\varphi(x)$ که بازه‌ی $[a,b]$ را به زیر بازه‌ی آن $[a_۱, b_۱]$ تبدیل می‌کند، یک *انقباض* نامیده می‌شود، اگر فاصله‌ی بین هر دو نقطه‌ی این بازه را لااقل M برابر کاهش دهد، که در اینجا داریم $M > ۱$. از آنجا که فاصله‌ی بین $x_۲$ و $x_۱$ برابر با $|x_۲ - x_۱|$ است، لذا شرط را می‌توان به صورت زیر فرمول‌بندی کرد.

یک نگاشت روی بازه‌ی $[a,b]$ *یک انقباض است، اگر یک عدد* q*، با شرط* $۰ < q < ۱$*، وجود داشته باشد به طوری که برای هر دو نقطه‌ی* $x_۱$ *و* $x_۲$ *متعلق به بازه‌ی* $[a,b]$*، نامعادله‌ی*

$$|\varphi(x_۲) - \varphi(x_۱)| < q|x_۲ - x_۱| \qquad (۳۲)$$

تأمین شود (در اینجا، $q = ۱/M$*).*

یک نگاشت انقباضی $\varphi(x)$، طول یک زیربازه‌ی دلخواه $[c,d]$ از بازه‌ی $[a,b]$ را لااقل $M = ۱/q$ برابر کاهش می‌دهد. در حقیقت، فرض کنید $[c_۱, d_۱]$ تصویر بازه‌ی $[c,d]$ باشد. آنگاه $c_۱$ و $d_۱$ تصاویر نقطه‌هایی مانند $x_۱$ و $x_۲$ از بازه‌ی $[c,d]$ هستند:

$$c_۱ = \varphi(x_۱), \quad d_۱ = \varphi(x_۲).$$

ولی در این صورت

$$|d_۱ - c_۱| = |\varphi(x_۲) - \varphi(x_۱)| \le q|x_۲ - x_۱|.$$

از آنجا که نقاط $x_۱$ و $x_۲$ در بازه‌ی $[c,d]$ قرار دارند، لذا فاصله‌ی بین آنها، $|x_۲ - x_۱|$، کمتر از طول $|d - c|$ بازه‌ی $[c,d]$ است. بنا بر این،

$$|d_۱ - c_۱| \le q|d - c|.$$

این همان اثبات مطلب مورد نظر است.

اکنون می‌توانیم شرطی را برای اینکه دستگاه بازه‌های $[a_۱, b_۱], \ldots, [a_n, b_n], \ldots$، که با استفاده‌ی متوالی از نگاشت $\varphi(x)$ از بازه‌ی $[a,b]$ حاصل شده است، به یک نقطه منقبض شود، فرمول‌بندی کنیم.

اگر نگاشت $\varphi(x)$ *که بازه‌ی* $[a,b]$ *را به زیربازه‌ی آن* $[a_۱, b_۱]$ *می‌برد، یک انقباض باشد، آنگاه دستگاه بازه‌های* $[a_۱, b_۱], \ldots, [a_n, b_n], \ldots$ *به یک نقطه‌ی* ξ *متعلق به بازه‌ی* $[a,b]$ *منتهی خواهد شد.*

در واقع، از آنجا که نگاشت $\varphi(x)$ یک انقباض است، لذا برای هر n داریم:

$$|b_n - a_n| \le q|b_{n-۱} - a_{n-۱}|.$$

به همین ترتیب، داریم:

$$|b_{n-۱} - a_{n-۱}| \leq q|b_{n-۲} - a_{n-۲}|.$$

ولی آنگاه

$$|b_n - a_n| \leq q^۲|b_{n-۱} - a_{n-۱}|.$$

با تکرار این استدلال، خواهیم داشت:

$$|b_n - a_n| \leq q^n|b - a|.$$

از آنجا که $۰ < q < ۱$، لذا توالی اعداد $q, q^۲, \ldots, q^n, \ldots$ به صفر میل می‌کند، و لذا طول‌های $|b_n - a_n|$ بازه‌های $[a_n, b_n]$ وقتی که n به بی‌نهایت میل می‌کند، به سمت صفر میل می‌کند. لذا هیچ بازه‌ی $[c, d]$ نمی‌تواند وجود داشته باشد که زیربازه‌ی همه‌ی بازه‌های $[a_n, b_n]$ باشد. بنا بر این، دستگاه بازه‌های

$$[a, b], [a_۱, b_۱], \ldots, [a_n, b_n], \ldots$$

به یک نقطه منقبض می‌شود.

و بالاخره، نگاشت‌های $\varphi(x)$ را که برای آنها نامعادله‌ی (۳۲)،

$$|\varphi(x_۲) - \varphi(x_۱)| < q|x_۲ - x_۱|,$$

برای هر دو عدد $x_۲$ و $x_۱$ تأمین می‌شود، در نظر می‌گیریم. اینگونه نگاشت‌ها، انقباض‌هایی روی تمام محور اعداد هستند. نشان می‌دهیم که در این حالت، بازه‌ای وجود دارد که تحت نگاشت $\varphi(x)$ منقبض می‌شود. از آنجا که شرط (۳۲) برای هر دو نقطه‌ی $x_۱$ و $x_۲$ تأمین می‌شود، لذا کافی است که نشان دهیم که یک بازه وجود دارد که $\varphi(x)$ آن را به خودش نگاشت می‌کند. یک عدد دلخواه a را در نظر بگیرید و قرار دهید $b = (a)$. عدد $q_۱ < ۱$ را انتخاب کنید به گونه‌ای که $q < q_۱$.

فرض کنید قرار دهیم

$$R = \frac{|b - a|}{۱ - q_۱}.$$

نشان خواهیم داد که بازه‌ی $[a - R, a + R]$ با نگاشت $\varphi(x)$ به یک زیربازه برده می‌شود. در واقع، فرض کنید x یک نقطه از این بازه باشد. آنگاه $|x - a| < R$. با استفاده از نامعادله‌ی (۳۲)، نتیجه می‌گیریم که

$$|\varphi(x) - b| = |\varphi(x) - \varphi(a)| < q|x - a| \leq qR.$$

ولی آنگاه

$$|\varphi(x) - a| = |\varphi(x) - b + b - a| \leq |\varphi(x) - b| + |b - a| \leq$$

$$\leq qR + |b - a| = qR + (۱ - q_۱)R = (۱ + q - q_۱)R < R.$$

این نشان می‌دهد که هر نقطه‌ی بازه‌ی $[a - R, a + R]$ به وسیله‌ی نگاشت $\varphi(x)$ به نقطه‌ای از همان بازه برده می‌شود، و بنا بر این، نگاشت $\varphi(x)$ بازه‌ی $[a - R, a + R]$ را منقبض می‌کند.

۱۰ نگاشت انقباضی و روش تکرار

اکنون به روش تکرار باز می‌گردیم. این روش در حل معادلات از نوع $x = \varphi(x)$ به کار می‌رود. اگر ξ یک ریشه‌ی این معادله باشد، آنگاه داریم $\varphi(\xi) = \xi$، و نگاشت $x \to \varphi(x)$ نقطه‌ی ξ را در همان جا ثابت نگه می‌دارد. لذا *مسئله‌ی حل معادله‌ی* $x = \varphi(x)$ *هم‌ارز است با مسئله‌ی پیدا کردن نقاط ثابت نگاشت* $\varphi(x)$.

اگر نگاشت $\varphi(x)$ روی بازه‌ی $[a, b]$ یک انقباض باشد، آنگاه همیشه یک نقطه‌ی ثابت در این بازه وجود دارد. برای اینکه خودمان را در این زمینه قانع کنیم، مجموعه‌ای از بازه‌ها

$$[a_۱, b_۱], [a_۲, b_۲], \ldots, [a_n, b_n], \ldots$$

را که با اعمال متوالی نگاشت $\varphi(x)$ بر $[a, b]$ به دست آمده است، در نظر می‌گیریم. از آنجا که $\varphi(x)$ یک نگاشت انقباضی روی بازه‌ی $[a, b]$ است، لذا یک نقطه‌ی یکتای ξ وجود دارد که در همه‌ی بازه‌های $[a_n, b_n]$ مشترک است. این یک نقطه‌ی ثابت نگاشت $\varphi(x)$ است.

در واقع، نگاشت $\varphi(x)$ هر بازه‌ی $[a_n, b_n]$ را به یک زیربازه‌ی $[a_{n+۱}, b_{n+۱}]$ می‌برد. بنا بر این، تصویر $\varphi(x)$ هر نقطه‌ی x از بازه‌ی $[a_n, b_n]$ در زیربازه‌ی $[a_{n+۱}, b_{n+۱}]$ قرار دارد، و بنا بر این، قطعاً درون $[a_n, b_n]$ است. از آنجا که نقطه‌ی ξ به همه‌ی بازه‌های $[a_n, b_n]$ تعلق دارد، لذا تصویر آن $\varphi(\xi)$ نیز باید به همه‌ی این بازه‌ها تعلق داشته باشد. ولی تنها نقطه‌ای که به همه‌ی بازه‌های $[a_n, b_n]$ تعلق دارد، نقطه‌ی ξ است. بنا بر این، $\xi = \varphi(\xi)$، یعنی ξ یک نقطه‌ی ثابت نگاشت $\varphi(\xi)$ است.

به این ترتیب، برای نگاشت‌های انقباضی روی بازه‌ی $[a, b]$، همیشه یک نقطه‌ی ثابت در درون بازه وجود دارد. این نقطه یکتا است. در واقع، اگر یک نقطه‌ی ثابت دیگر η وجود داشته باشد، به طوری که $\eta = \varphi(\eta)$، آنگاه نامعادله‌ی

$$|\eta - \xi| = |\varphi(\eta) - \varphi(\xi)| < q|\eta - \xi|$$

برقرار خواهد بود. از آنجا که $۰ < q < ۱$، لذا این نامعادله را فقط در صورتی می‌توان تأمین کرد که $|\eta - \xi| = ۰$ باشد، یعنی اگر $\eta = \xi$.

حال یک شرط لازم را برای همگرایی فرآیند تکرار فرمول‌بندی می‌کنیم.

فرض کنید تابع $\varphi(x)$ یک نگاشت انقباضی را روی بازه‌ی $[a,b]$ ایجاد می‌کند. آنگاه برای هر نقطه‌ی $x_{\circ}$ متعلق به این بازه، دنباله‌ی اعداد $x_{\circ}, x_{1}, x_{2}, \dots, x_{n}, \dots$، که در اینجا $x_{n+1} = \varphi(x_n)$، به یک ریشه‌ی ξ از معادله‌ی $x = \varphi(x)$ که در این بازه قرار دارد، همگرا می‌شود.

در واقع، فرض کنید $[a_n, b_n]$، با $n = 1, 2, \dots$، دنباله‌ی بازه‌هایی باشد که با اعمال متوالی نگاشت $\varphi(x)$ از بازه‌ی $[a,b]$ به دست آمده است. از آنجا که نقطه‌ی $x_{\circ}$ در بازه‌ی $[a,b]$ قرار دارد، تصویر آن $x_1 = \varphi(x_{\circ})$ در بازه‌ی $[a_1, b_1]$ واقع است، تصویر $x_2 = \varphi(x_1)$ از نقطه‌ی x_1 در بازه‌ی $[a_2, b_2]$ واقع است، و الی آخر. به این ترتیب، برای هر مقدار n، نقطه‌ی x_n در بازه‌ی $[a_n, b_n]$ قرار دارد. از آنجا که طول بازه‌های $[a_n, b_n]$ با افزایش n به صفر نزدیک می‌شود، لذا دنباله‌ی نقاط $x_1, \dots, x_n, \dots$ به نقطه‌ی مشترک ξ این بازه‌ها نزدیک می‌شود.

استدلال فوق نشان می‌دهد که هر نقطه‌ی $x_{\circ}$ از بازه‌ی $[a,b]$ را می‌توان به عنوان نقطه‌ی ابتدایی انتخاب کرد.

اکنون ببینیم که نقاط $x_{\circ}, x_1, \dots, x_n, \dots$ با چه نرخی به نقطه‌ی ξ نزدیک می‌شوند. از آنجا که $\varphi(\xi) = \xi$، لذا برای هر نقطه‌ی c از بازه‌ی $[a,b]$ داریم:

$$|\varphi(c) - \xi| = |\varphi(c) - \varphi(\xi)| < q|c - \xi|. \qquad (۳۳)$$

نامعادله‌ی (۳۳) را بر نقاط $x_{\circ}, \dots, x_n, \dots$ اعمال کنید. از آنجا که $x_n = \varphi(x_{n-1})$، لذا نتیجه می‌شود که

$$|x_n - \xi| = |\varphi(x_{n-1}) - \xi| < q|x_{n-1} - \xi|.$$

ولی آنگاه برای هر n داریم:

$$|x_n - \xi| < q|x_{n-1} - \xi| < q^2|x_{n-2} - \xi| < \cdots < q^n|x_{\circ} - \xi|.$$

لذا خطای $|x_n - \xi|$ با افزایش n لااقل با سرعت یک تصاعد هندسی با نسبت q کاهش می‌یابد.

با چند مثال نشان می‌دهیم که شرط ثابت شده در بالا را چگونه می‌توان مورد استفاده قرار داد.

مثال ۱: آیا روش تکرار را می‌توان برای حل معادله‌ی

$$x = \frac{1}{4 + x^2} \qquad (۳۴)$$

مورد استفاده قرار داد؟

در این حالت،

$$\varphi(x) = \frac{1}{4 + x^2}.$$

برای x_1 و x_2 دلخواه داریم:

$$|\varphi(x_۲)-\varphi(x_۱)| = \left|\frac{۱}{۴+x_۲^۲}-\frac{۱}{۴+x_۱^۲}\right| =$$

$$= \frac{|x_۱^۲-x_۲^۲|}{(۴+x_۲^۲)(۴+x_۱^۲)} = \frac{|x_۱-x_۲|}{(۴+x_۲^۲)(۴+x_۱^۲)}|x_۱+x_۲|.$$

با استفاده از نامعادله‌ی بین میانگین هندسی و میانگین حسابی، به دست می‌آوریم:

$$|x| = \frac{۱}{۲}\sqrt{۴x^۲} \leq \frac{۴+x^۲}{۴}.$$

بنا بر این،

$$|x_۱+x_۲| \leq |x_۱|+|x_۲| \leq \frac{(۴+x_۱^۲)+(۴+x_۲^۲)}{۴} =$$

$$= ۲+\frac{x_۱^۲+x_۲^۲}{۴} \leq ۲+\frac{x_۱^۲+x_۲^۲}{۲}+\frac{x_۱^۲x_۲^۲}{۸} =$$

$$= \frac{۱}{۸}(۴+x_۱^۲)(۴+x_۲^۲).$$

ثابت کرده‌ایم که برای هر $x_۱$ و $x_۲$، نامعادله‌ی

$$\frac{x_۱+x_۲}{(۴+x_۱^۲)(۴+x_۲^۲)} \leq \frac{۱}{۸}$$

برقرار است و بنا بر این،

$$|\varphi(x_۲)-\varphi(x_۱)| \leq \frac{۱}{۸}|x_۲-x_۱|.$$

این بدان معنا است که نگاشت $\varphi(x)$ یک انقباض روی تمام محور است.
از قبل می‌دانیم که در این حالت، بازه‌ای وجود دارد که توسط انقباض به خودش نگاشت می‌شود. برای پیدا کردن آن، قرار دهید $a=۰$. نگاشت $\varphi(x)$ نقطه‌ی $a=۰$ را به نقطه‌ی $b=۱/۴$ می‌برد. به علاوه، در حالت مورد نظر ما، $q=۱/۸$. قرار می‌دهیم $q_۱=۱/۴$ و عدد $\frac{|b-a|}{۱-q_۱}=\frac{۱}{۳}$ را با R نشان می‌دهیم. بازه‌ی $\left[-\frac{۱}{۳},\frac{۱}{۳}\right]$ توسط $\varphi(x)$ به خودش نگاشت می‌شود. در نتیجه، یک نقطه‌ی ثابت در این بازه وجود دارد که ریشه‌ی معادله‌ی (۳۴) است. برای پیدا کردن این نقطه، یک نقطه‌ی دلخواه از بازه‌ی $\left[-\frac{۱}{۳},\frac{۱}{۳}\right]$ را در نظر بگیرید، مثلاً $x_۰=۰$. با استفاده از روش تکرار خواهیم داشت:

$$x_1 = \frac{۱}{۴} = ۰/۲۵,$$

$$x_2 = \frac{۱}{۴ + ۰/۲۵^۲} = \frac{۱}{۴/۰۶۲۵} = ۰/۲۴۶۱,$$

$$x_3 = \frac{۱}{۴ + ۰/۲۴۶۱^۲} = \frac{۱}{۴/۰۶۰۵} = ۰/۲۴۶۳,$$

$$x_4 = \frac{۱}{۴ + ۰/۲۴۶۳^۲} = \frac{۱}{۴/۰۶۰۵} = ۰/۲۴۶۳.$$

بنا بر این، با دقت ۰/۰۰۰۱، داریم $x_3 = x_4$. نتیجه می‌شود که، با دقت ۰/۰۰۰۱، ریشه‌ی معادله‌ی (۳۴) در درون بازه‌ی $\left[-\frac{۱}{۳}, \frac{۱}{۳}\right]$ عبارت است از ۰/۲۴۶۳. از آنجا که نگاشت $\varphi(x)$ روی تمام محور یک انقباض است، لذا معادله‌ی (۳۴) هیچ ریشه‌ی دیگری ندارد.

مثال ۲: آیا از روش تقریبات متوالی می‌توان برای حل معادله‌ی

$$x = ۱ + \sqrt[۳]{x}$$

در بازه‌ی $[-۱, ۸]$ استفاده کرد؟

در اینجا، $\varphi(x) = ۱ + \sqrt[۳]{x}$. از آنجا که $\varphi(-۱) = ۰$ و $\varphi(۸) = ۳$، لذا $\varphi(x)$ بازه‌ی $[-۱, ۸]$ را به خودش نگاشت می‌کند. اما روی این بازه یک انقباض نیست، چون مثلاً اگر $x_1 = -۰/۰۰۸$، $x_2 = ۰/۰۰۸$:

$$|\varphi(x_2) - \varphi(x_1)| = \left|\sqrt[۳]{۰/۰۰۸} - \sqrt[۳]{-۰/۰۰۸}\right| = ۰/۴ > |x_2 - x_1|.$$

برای اثبات اینکه نگاشت مثال ۱ یک انقباض است، از نامعادله‌ی $\sqrt{ab} < \frac{a+b}{۲}$ استفاده کردیم. اکنون چند نامعادله را معرفی می‌کنیم که غالباً برای اثبات اینکه یک نگاشت یک انقباض است، باید از آنها استفاده کنیم.

ثابت کنید که برای $x > ۰$، نامعادله‌ی

$$\sin x < x < \tan x \qquad (۳۵)$$

برقرار است. برای این کار، دقت کنید که مساحت S_{OAB} (شکل ۶) قطاع OAB با زاویه‌ی مرکزی x بین مساحت مثلث‌های OAB و OAT قرار دارد:

$$S_{\triangle OAB} < S_{\text{sect}\, OAB} < S_{\triangle OAT}.$$

اما

$$S_{\triangle OAB} = \frac{R^۲ \sin x}{۲}, \quad S_{\triangle OAT} = \frac{R^۲ \tan x}{۲}$$

(R شعاع دایره است). مساحت قطاع OAB برابر است با $\frac{R^۲x}{۲}$ (زاویه بر حسب رادیان اندازه‌گیری می‌شود). بنا بر این،

$$\frac{R^۲ \sin x}{۲} < \frac{R^۲ x}{۲} < \frac{R^۲ \tan x}{۲}.$$

با خط زدن $R^۲/۲$، نامعادله‌ی (۳۵) به دست می‌آید. از معادله‌ی (۳۵) نتیجه می‌شود که برای $۰ < x < ۱$ داریم:

$$x < \arcsin x,$$

و برای $x > ۰$ داریم:

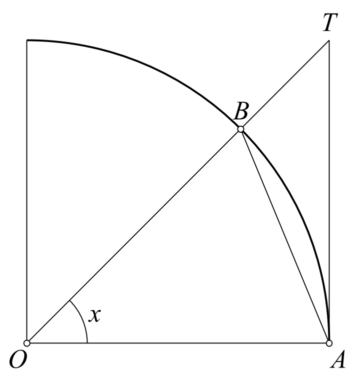
$$x > \arctan x.$$

همچنین، نامعادله‌های زیر را در نظر بگیرید

$$e^x > ۱ + x, \quad x > ۰,$$

$$\ln(۱ + x) < x, \quad ۰ < x < ۱,$$

که اثبات آنها کمی مشکل‌تر است.



شکل ۶

مثال ۳: تحقیق کنید که آیا معادله‌ی

$$x = ۱ + \frac{۱}{۲} \arctan x \tag{۳۶}$$

را می‌توان با روش تکرار حل کرد.

از آنجا که برای همه‌ی مقادیر x داریم $۱ + \frac{۱}{۲} \arctan x > ۰$، لذا این معادله فقط می‌تواند ریشه‌های مثبت داشته باشد. داریم:

$$\varphi(x) = ۱ + \frac{۱}{۲}\arctan x. \tag{۳۷}$$

بنا بر این،

$$|\varphi(x_۲) - \varphi(x_۱)| = \left|\left(۱ + \frac{۱}{۲}\arctan x_۲\right) - \left(۱ + \frac{۱}{۲}\arctan x_۱\right)\right|$$

$$= \frac{۱}{۲}|\arctan x_۲ - \arctan x_۱|.$$

ولی برای $x_۱ \geq ۰$ و $x_۲ \geq ۰$

$$\arctan x_۲ - \arctan x_۱ = \arctan \frac{x_۲ - x_۱}{۱ + x_۱ x_۲},$$

و بنا بر این،

$$|\varphi(x_۲) - \varphi(x_۱)| = \frac{۱}{۲}\left|\arctan \frac{x_۲ - x_۱}{۱ + x_۱ x_۲}\right| <$$

$$< \frac{۱}{۲}\left|\frac{x_۲ - x_۱}{۱ + x_۱ x_۲}\right| < \frac{۱}{۲}|x_۲ - x_۱|.$$

نتیجه می‌شود که نگاشت روی نیم‌محور $[۰, \infty)$ یک انقباض است. این انقباض، بازه‌ی $[۰, \sqrt{۳}]$ را به زیربازه‌ی آن $[۱, ۱ + \pi/۶]$ نگاشت می‌کند. بنا بر این، یک ریشه‌ی یکتای معادله‌ی (۳۶) وجود دارد که در بازه‌ی $[۱, ۱ + \pi/۶]$ واقع است. برای پیدا کردن این ریشه، قرار می‌دهیم $x_۱ = ۱$. بنا بر این،

$$x_۲ = ۱ + \frac{۱}{۲}\arctan ۱ = ۱ + \frac{\pi}{۸} \approx ۱/۳۹,$$

$$x_۳ = ۱ + \frac{۱}{۲}\arctan ۱/۳۹ = ۱/۴۷۴,$$

$$x_۴ = ۱ + \frac{۱}{۲}\arctan ۱/۴۷۴ = ۱/۴۸۷,$$

$$x_۵ = ۱ + \frac{۱}{۲}\arctan ۱/۴۸۷ = ۱/۴۸۹,$$

$$x_۶ = ۱ + \frac{۱}{۲}\arctan ۱/۴۸۹ = ۱/۴۹۰,$$

$$x_۷ = ۱ + \frac{۱}{۲}\arctan ۱/۴۹۰ = ۱/۴۹۰.$$

می‌بینیم که تساوی $x_۶ = x_۷ = ۱/۴۹۰$ با دقت ۰/۰۰۱ تأمین شده است. این بدان معنا است که با این دقت، ریشه‌ی معادله‌ی ما ۱/۴۹۰ است. از آنجا که نگاشت $\varphi(x)$ روی تمام نیم‌محور $۰ \le x < \infty$ یک انقباض است، لذا معادله‌ی (۳۶) ریشه‌های دیگری ندارد.

خیلی از اوقات اتفاق می‌افتد که یک معادله‌ی $x = \varphi(x)$ که نمی‌توان آن را با روش تکرار حل کرد، قابل تبدیل به معادله‌ای است که امکان استفاده از این روش را فراهم می‌کند. مثلاً معادله‌ی

$$x = x^۳ - ۲ \qquad (۳۸)$$

را در نظر بگیرید. از آنجا که داریم

$$\varphi(۱) = -۱ < ۱, \qquad \varphi(۲) = ۶ > ۲,$$

لذا این معادله دارای ریشه‌ای است که در بازه‌ی $[۱,۲]$ واقع شده است. ولی نگاشت $x^۳ - ۲$ روی این بازه یک انقباض نیست، چون آن را به یک زیربازه نگاشت نمی‌کند. معادله‌ی (۳۸) را به صورت

$$x = \sqrt[۳]{x+۲}$$

بازنویسی می‌کنیم. با قرار دادن $\psi(x) = \sqrt[۳]{x+۲}$، داریم:

$$|\psi(x_۲) - \psi(x_۱)| = \left|\sqrt[۳]{x_۲+۲} - \sqrt[۳]{x_۱+۲}\right| =$$

$$= \left|\frac{x_۲ - x_۱}{\sqrt[۳]{(x_۲+۲)^۲} + \sqrt[۳]{(x_۱+۲)(x_۲+۲)} + \sqrt[۳]{(x_۱+۲)^۲}}\right|.$$

در بازه‌ی $[۱,۲]$، داریم $x_۱ \ge ۱$ و $x_۲ \ge ۱$. بنا بر این،

$$|\psi(x_۲) - \psi(x_۱)| \leq \frac{۱}{۳\sqrt[۳]{۹}} |x_۲ - x_۱|.$$

ثابت کرده‌ایم که نگاشت $\psi(x)$ روی بازه‌ی $[۱,۲]$ یک انقباض است. قرار می‌دهیم $x_۱ = ۱$ و روش تکرار را اعمال می‌کنیم.

$$x_۲ = \sqrt[۳]{۳} = ۱/۴۴۲,$$

$$x_۳ = \sqrt[۳]{۳/۴۴۲} = ۱/۵۱۰,$$

$$x_۴ = \sqrt[۳]{۳/۵۱۰} = ۱/۵۲۰,$$

$$x_۵ = \sqrt[۳]{۳/۵۲۰} = ۱/۵۲۱,$$

$$x_۶ = \sqrt[۳]{۳/۵۲۱} = ۱/۵۲۱.$$

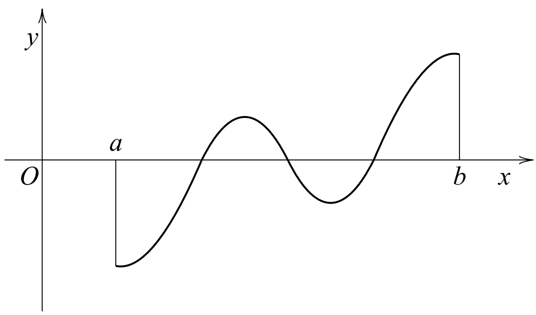
لذا ۱/۵۲۱، با دقت ۰/۰۰۱، ریشه‌ی معادله‌ی (۳۸) در داخل بازه‌ی $[۱,۲]$ است. این معادله ریشه‌ی دیگری ندارد.

می‌بینیم که معادله‌ی اولیه با یک تبدیل مناسب به شکلی ساده شده است که می‌توان روش تکرار را بر آن اعمال کرد.

آزمون همگرایی برای روش تکرار که در اینجا شرح داده شد، زیاد راحت نیست، زیرا نیاز به اثبات نامعادله‌های نسبتاً پیچیده‌ای دارد. در زیر (فصل ۲۱) یک نتیجه از این آزمون را در نظر خواهیم گرفت، که اثبات همگرایی فرآیند تکرار را بسیار آسان‌تر می‌کند.

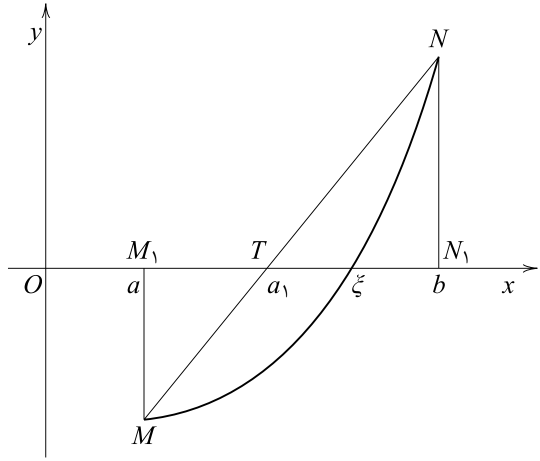
۱۱ روش وترها

روش تکرار یکی از عمومی‌ترین روش‌ها برای حل تقریبی معادلات است. بسیاری از روش‌های دیگر حل تقریبی معادلات، صرفاً حالت‌های خاصی از روش تکرار هستند. در اینجا، یکی از این روش‌ها را که *روش وترها* (قاعده‌ی مکان‌های غلط) نامیده می‌شود، شرح می‌دهیم.



شکل ۷

فرض کنید می‌خواهیم معادله‌ی $f(x) = 0$ را حل کنیم. این مسئله معادل با پیدا کردن نقاطی است که در آن نقاط، نمودار تابع $y = f(x)$ محور x را قطع می‌کند. فرض کنید تابع $f(x)$ پیوسته است و مقادیر آن در نقاط a و b، علامت‌های متفاوت دارند. آنگاه لااقل یک نقطه در بازه‌ی $[a, b]$ وجود دارد که تابع برای آن نقطه صفر می‌شود. به عبارت دیگر، نمودار $y = f(x)$ محور x را لااقل در یک نقطه‌ی ξ از بازه‌ی $[a, b]$ قطع می‌کند. در حالت کلی، ممکن است چندین نقطه‌ی اینچنینی وجود داشته باشند (شکل ۷). لیکن اگر تابع $y = f(x)$ در بازه‌ی $[a, b]$ *یکنوا* باشد و مقادیر آن در دو انتهای بازه، علامت مخالف داشته باشند، آنگاه نمودار این تابع محور x را فقط یک در نقطه‌ی ξ قطع می‌کند. برای پیدا کردن این نقطه به روش تقریبی، وتر MN را جایگزین قوس منحنی $y = f(x)$ بر روی بازه‌ی $[a, b]$ کنید و نقطه‌ی T تقاطع این وتر با محور x را پیدا کنید (شکل ۸).



شکل ۸

برای این کار، مثلث‌های MM_1T و NN_1T را در نظر بگیرید. از تشابه این مثلث‌ها، نتیجه می‌شود که $\frac{M_1T}{MM_1} = \frac{TN_1}{N_1N}$. ولی از شکل ۸ می‌توان دید که $M_1T = a_1 - a$، $TN_1 = b - a_1$، $MM_1 = -f(a)$، و $N_1N = f(b)$، که در اینجا a_1 نشان دهنده‌ی مختصه‌ی طول نقطه‌ی تقاطع وتر MN با محور x است. بنا بر این،

$$\frac{a_1 - a}{-f(a)} = \frac{b - a_1}{f(b)},$$

با حل این معادله، به دست می‌آوریم:

$$a_1 = \frac{af(b) - bf(a)}{f(b) - f(a)}.$$

این را به صورت زیر نیز می‌توان نوشت:

$$a_1 = b - f(b)\frac{b-a}{f(b) - f(a)}, \tag{۳۹}$$

یا

$$a_1 = a - f(a)\frac{b-a}{f(b) - f(a)} \tag{۴۰}$$

(این را با تبدیل کردن طرف راست فرمول‌های (۳۹) و (۴۰) به یک مخرج مشترک، تحقیق کنید).

عدد a_1 مقدار تقریبی ریشه‌ی معادله‌ی $f(x) = 0$ است که بین نقطه‌های a و b واقع است.

از آنجا که علامت اعداد $f(a)$ و $f(b)$ مخالف است، لذا دو حالت امکان دارد: یا علامت $f(a)$ و یا علامت $f(b)$ مخالف علامت $f(a_1)$ است. اگر علامت تابع $f(x)$ در نقطه‌های a و a_1 مخالف باشد،

در آن صورت فرمول (۳۹) بر بازه‌ی $[a, a_1]$ اعمال می‌شود، و تقریب بعدی برای ریشه‌ی مورد نظر به دست می‌آید:

$$a_2 = a_1 - f(a_1)\,\frac{a_1 - a}{f(a_1) - f(a)}\,. \tag{۴۱}$$

از سوی دیگر، اگر تابع $f(x)$ در نقطه‌های a_1 و b مقادیری با علامت‌های مخالف اتخاذ کند، آنگاه فرمول (۴۰) بر بازه‌ی $[a_1, b]$ اعمال می‌شود و داریم:

$$a_2 = a_1 - f(a_1)\,\frac{b - a_1}{f(b) - f(a_1)}\,. \tag{۴۲}$$

پس از پیدا کردن a_2، فرمول (۳۹) بر بازه‌ی $[a, a_2]$ (و یا در صورت لزوم فرمول (۴۰) بر بازه‌ی $[a_2, b]$) اعمال می‌شود و تقریب بعدی a_3 به دست می‌آید. به طور کلی، اگر تقریب a_n قبلاً پیدا شده باشد، تقریب بعدی از فرمول

$$a_{n+1} = a_n - f(a_n)\,\frac{a_n - a}{f(a_n) - f(a)} \tag{۴۳}$$

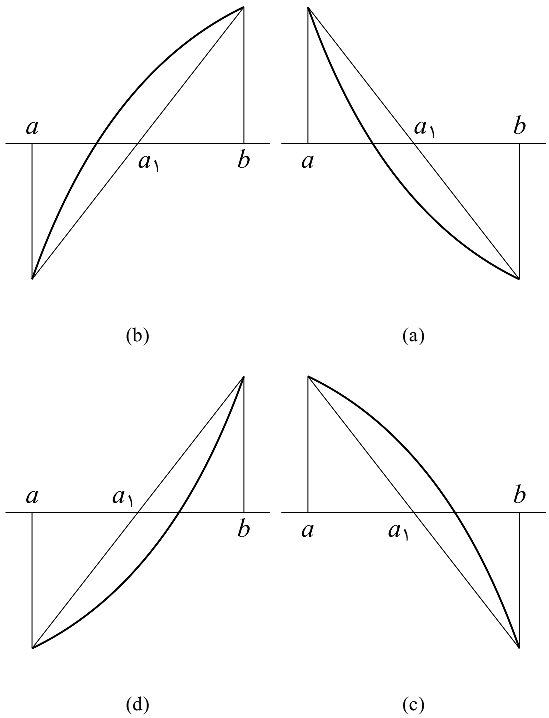
و یا فرمول

$$a_{n+1} = a_n - f(a_n)\,\frac{b - a_n}{f(b) - f(a_n)} \tag{۴۴}$$

به دست می‌آید.

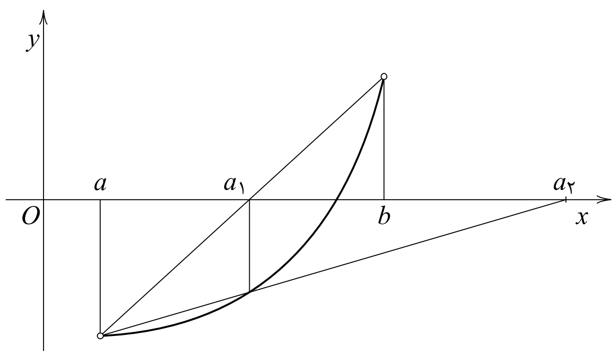
ما دو فرمول (۴۳) و (۴۴) را به دست آوردیم. حال ببینیم که چه زمانی باید از هر یک از آنها استفاده کرد. فرض کنید تقعر منحنی به طرف بالا است. در این حالت، نقطه‌های منحنی باید به هر یک از دو انتهای M و N آن که تابع مثبت است، وصل شود. اما اگر تقعر منحنی به طرف پایین باشد، نقطه‌ها باید به انتهایی که تابع منفی است، وصل شود. موقعیت‌های مختلفی که ممکن است پدید آید، در شکل ۹ نشان داده شده است. بر اساس این نمودارها، درستی جملات زیر از نظر هندسی بدیهی است:

فرض کنید که تابع $f(x)$ روی بازه‌ی $[a, b]$ پیوسته و یکنوا است، جهت تقعر آن ثابت است، و در دو انتهای بازه، مقادیری با علامت مخالف اتخاذ می‌کند. آنگاه، مشروط بر آنکه روش تقریب مناسب انتخاب شود، روش وترها دنباله‌ای از نقاط را به دست می‌دهد که به ریشه‌ی معادله‌ی $f(x) = 0$ همگرا می‌شود.



شکل ۹

از سوی دیگر، اگر فرمول نامناسب انتخاب شود، روش وترها ممکن است نقطه‌ی a_2 را از خارج از بازه‌ی $[a, b]$ اتخاذ کند. این وضعیت در شکل ۱۰ نشان داده شده است.



شکل ۱۰

روش وترها که در اینجا شرح داده شد، حالت خاصی از روش تکرار است. فرض کنید تابع $f(x)$ در

$x = a$ صفر نمی‌شود. در این حالت، معادله‌ی $f(x) = 0$ هم‌ارز است با معادله‌ی

$$x = x - f(x)\,\frac{x-a}{f(x)-f(a)}\,. \tag{۴۵}$$

در واقع، اگر $f(\xi) = 0$، آنگاه

$$\xi = \xi - f(\xi)\,\frac{\xi-a}{f(\xi)-f(a)}\,. \tag{۴۶}$$

بر عکس، اگر $\xi \neq a$ و معادله‌ی (۴۶) برقرار باشد، آنگاه $f(\xi) = 0$.

ولی معادله‌ی (۴۵) به شکل $x = \varphi(x)$ است، که در آن

$$\varphi(x) = x - f(x)\,\frac{x-a}{f(x)-f(a)} = \frac{af(x)-xf(a)}{f(x)-f(a)}\,.$$

قرار دهید $x_0 = b$ و روش تکرار را اعمال کنید. همان دنباله‌ی اعداد $a_1, a_2, , a_n, \ldots$ را به دست می‌آورید که با استفاده از روش وترها به دست می‌آید:

$$a_{n+1} = a_n - f(a_n)\,\frac{a_n-a}{f(a_n)-f(a)}\,.$$

به عنوان یک مثال، معادله‌ی

$$x^3 + 3x - 1 = 0 \tag{۴۷}$$

را با روش وترها حل می‌کنیم. در اینجا داریم: $f(x) = x^3 + 3x - 1$. از آنجا که $f(0) = -1$ و $f(1) = 3$، لذا معادله‌ی (۴۷) لااقل یک ریشه در بازه‌ی $[0, 1]$ دارد. اگر نمودار تابع $y = x^3 + 3x - 1$ را رسم کنیم، می‌توانیم ببینیم که تقعر این منحنی روی بازه‌ی $[0, 1]$ به طرف بالا است. بنا بر این، از فرمول (۳۹) استفاده می‌کنیم. بر اساس این فرمول، تقریب اول ریشه عبارت است از عدد

$$x_1 = b - f(b)\,\frac{b-a}{f(b)-f(a)} = 1 - 3\,\frac{1-0}{3-(-1)} = 0/25.$$

برای پیدا کردن تقریب دوم، از فرمول زیر استفاده می‌کنیم:

$$x_2 = b - f(b)\,\frac{b-x_1}{f(b)-f(x_1)} = 1 - 3\,\frac{1-0/25}{3+0/23} = 0/31.$$

آنگاه

$$x_{۳} = ۱ - ۳\,\frac{۱ - ۰/۳۱}{۳ + ۰/۰۴۰} = ۰/۳۱۹,$$

$$x_{۴} = ۱ - ۳\,\frac{۱ - ۰/۳۱۹}{۳ + ۰/۰۱۰} = ۰/۳۲۲,$$

$$x_{۵} = ۱ - ۳\,\frac{۱ - ۰/۳۲۲}{۳ + ۰/۰۰۰۶} = ۰/۳۲۲.$$

لذا با دقت ۰/۰۰۱، ریشه‌ی معادله در بازه‌ی [۰, ۱]، ۰/۳۲۲ است.

۱۲ بهبود روش وترها

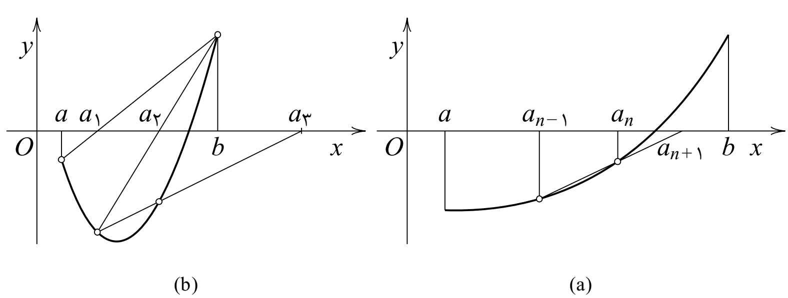
اگر روش وترها همگرا شود، نرخ همگرایی آن همانند روش تکرار است—میزان خطا در مقدار ریشه به صورت یک تصاعد هندسی کاهش می‌یابد. روشی برای بهبود روش وترها وجود دارد، به طوری که نرخ همگرایی آن خیلی بیشتر می‌شود. در روش معمولی وترها، ما در هر مرحله از یکی از دو انتهای بازه‌ی $[a,b]$ و آخرین تقریب به دست آمده استفاده می‌کنیم. به جای آن می‌توان از دو تقریب آخر استفاده کرد، چرا که آنها نسبت به انتهاهای بازه‌ی $[a,b]$ به ریشه نزدیک‌ترند.

فرمولی که از دو تقریب قبلی استفاده می‌کند، به صورت زیر است (شکل ۱۱a):

$$a_{n+1} = a_n - f(a_n)\,\frac{a_n - a_{n-1}}{f(a_n) - f(a_{n-1})} \tag{۴۸}$$

در اینجا، a_1 به کمک فرمول (۳۹) و a_2 به کمک یکی از دو فرمول (۴۱) یا (۴۲) محاسبه می‌شود، که این بستگی به علامت $f(a)$، $f(b)$، و $f(a_1)$ دارد: اگر $f(a) < 0$ و $f(b) > 0$، آنگاه برای $f(a_1) < 0$ فرمول (۴۲) و برای $f(a_1) > 0$ فرمول (۴۱) انتخاب می‌شود.

اگر اتفاق بیفتد که نقطه‌ی a_3 که به کمک فرمول (۴۱) محاسبه شده است، در خارج از بازه‌ی $[a,b]$ واقع شود، آنگاه باید در مرحله‌ی بعد به جای این نقطه، یکی از دو انتهای بازه را که به آن نزدیک‌تر است، استفاده کرد (شکل ۱۱b).



شکل ۱۱

مشخص شده است که همگرایی روش بهبود یافته‌ی وترها خیلی بهتر از روش معمولی است، یعنی

اگر ξ ریشه معادله‌ی $f(x) = ۰$ باشد، آنگاه

$$|a_{n+۱} - \xi| < C|a_n - \xi|^t, \qquad (۴۹)$$

که در اینجا

$$t = \frac{۱ + \sqrt{۵}}{۲}.$$

به عنوان یک مثال، از این روش برای حل همان معادله‌ی

$$x^۳ + ۳x - ۱ = ۰$$

که در بالا با استفاده از روش وترها حل کردیم، استفاده می‌کنیم. تقریب‌های اول $a_۱ = ۰/۲۵$ و $a_۲ = ۰/۳۱$ همانند روش معمولی وترها هستند.

تقریب بعدی به کمک فرمول زیر به دست می‌آید:

$$a_۳ = a_۲ - f(a_۲)\frac{a_۲ - a_۱}{f(a_۲) - f(a_۱)} =$$

$$= ۰/۳۱ + ۰/۰۴۰\,\frac{۰/۳۱ - ۰/۲۵}{-۰/۰۴۰ + ۰/۲۳۴} = ۰/۳۲۲۳.$$

داریم $f(۰/۳۲۲۳) = ۰/۰۰۰۴$. روشن است که $x = ۰/۳۲۳۳$ ریشه‌ی مورد نظر با تقریب ۰/۰۰۰۱ است.

۱۳ مشتق چندجمله‌ای

در حل معادله‌ی $f(x) = ۰$ به کمک روش تکرار، بخش زیادی از کار بستگی به تبدیل کردن معادله به شکل $x = \varphi(x)$ دارد. در خیلی از موارد، بهترین راه آن روشی است که به وسیله‌ی نیوتن (Newton) پیشنهاد شده است. این روش مبتنی بر مفهوم مشتق است. در این قسمت، در باره‌ی مفهوم مشتق یک چندجمله‌ای بحث می‌کنیم. به این ترتیب، خواهیم توانست از روش نیوتن برای حل معادله‌های جبری، یعنی معادله‌هایی که به شکل

$$a_۰ x^k + a_۱ x^{k-۱} + \cdots + a_k = ۰ \qquad (۵۰)$$

هستند، استفاده کنیم. فرض کنید

$$f(x) = a_۰ x^k + a_۱ x^{k-۱} + \cdots + a_k$$

یک چندجمله‌ای باشد. چندجمله‌ای $f(x+\alpha)$، یعنی عبارت

$$a_۰ (x+\alpha)^k + a_۱ (x+\alpha)^{k-۱} + \cdots + a_k, \qquad (۵۱)$$

را در نظر بگیرید.

اگر پرانتزها را در عبارت (۵۱) حذف کنیم، می‌بینیم که در بعضی از جملات اصلاً هیچ αیی وجود ندارد، بعضی از جملات آن را با توان یک دارند، بعضی با توان دو، و الی آخر. جمله‌هایی را که حاوی α با توان یکسان هستند، گروه‌بندی می‌کنیم. آنگاه چندجمله‌ای $f(x+\alpha)$ به شکل

$$f(x+\alpha) = f_۰(x) + f_۱(x)\alpha + f_۲(x)\alpha^۲ + \cdots + f_k(x)\alpha^k \qquad (۵۲)$$

در می‌آید (از آنجا که درجه‌ی چندجمله‌ای $f(x)$، k است، بالاترین توان α در عبارت (۵۲) نیز k است). بدیهی است که $f_۰(x), \ldots, f_k(x)$ نیز چندجمله‌ای‌هایی بر حسب x هستند.

مثال: فرض کنید

$$f(x) = ۲x^۳ - ۳x^۲ + ۶x - ۱.$$

آنگاه

$$f(x+\alpha) = ۲(x+\alpha)^۳ - ۳(x+\alpha)^۲ + ۶(x+\alpha) - ۱$$
$$= ۲\left(x^۳ + ۳x^۲\alpha + ۳x\alpha^۲ + \alpha^۳\right) - ۳\left(x^۲ + ۲x\alpha + \alpha^۲\right) + ۶(x+\alpha) - ۱$$
$$= \left(۲x^۳ - ۳x^۲ + ۶x - ۱\right) + \left(۶x^۲ - ۶x + ۶\right)\alpha + (۶x - ۳)\alpha^۲ + ۲\alpha^۳.$$

در نتیجه، در این حالت، داریم:

$$f_۰(x) = ۲x^۳ - ۳x^۲ + ۶x - ۱,$$
$$f_۱(x) = ۶x^۲ - ۶x + ۶,$$
$$f_۲(x) = ۶x - ۳,$$
$$f_۳(x) = ۲.$$

می‌بینیم که جمله‌ی $f_۰(x)$ معادل با $f(x)$ است. این یک اتفاق تصادفی نیست. اگر در معادله‌ی (۵۲) قرار دهیم $\alpha = ۰$، خواهیم داشت $f(x) = f_۰(x)$.

حال به جمله‌ی بعدی $f_۱(x)$ می‌پردازیم. ضریب α، یعنی چندجمله‌ای $f_۱(x)$، *مشتق چندجمله‌ای* $f(x)$ نامیده می‌شود. مثلاً مشتق چندجمله‌ای $۲x^۳ - ۳x^۲ + ۶x - ۱$، عبارت است از $۶x^۲ - ۶x + ۶$. مشتق یک چندجمله‌ای معمولاً به صورت $f'(x)$ نوشته می‌شود.

بنا بر این، مشتق $f'(x)$ چندجمله‌ای $f(x)$، ضریب α در بسط چندجمله‌ای $f(x+\alpha)$ بر حسب توان‌های α است.

با استفاده از نمادی که در بالا معرفی شد، می‌توانیم فرمول (۵۲) را به صورت زیر بازنویسی کنیم:

$$f(x+\alpha) = f(x) + f'(x)\alpha + \cdots. \qquad (۵۳)$$

تعلیق در فرمول فوق نشان دهنده‌ی جمله‌های حاوی $\alpha^۲, \alpha^۳, \ldots, \alpha^k$ است. برای نمونه،

$$۲(x+\alpha)^۳ - ۳(x+\alpha)^۲ + ۶(x+\alpha) - ۱ =$$
$$= \left(۲x^۳ - ۳x^۲ + ۶x - ۱\right) + \left(۶x^۲ - ۶x + ۶\right)\alpha + \cdots.$$

ما مفهوم مشتق چندجمله‌ای $f(x)$ را معرفی کردیم. اکنون چگونگی محاسبه‌ی مشتق را نشان می‌دهیم. برای این کار، چندجمله‌ای

$$f(x+\alpha) = a_۰(x+\alpha)^k + a_۱(x+\alpha)^{k-۱} + \cdots + a_{k-۱}(x+\alpha) + a_k$$

را در نظر بگیرید.

با جایگزین کردن عبارت $(x+\alpha)^m = x^m + mx^{m-۱}\alpha + \cdots$ (ر.ک. قسمت ۶)، داریم:

$$f(x+\alpha) = a_۰\left(x^k + kx^{k-۱}\alpha + \cdots\right) +$$
$$a_۱\left[x^{k-۱} + (k-۱)x^{k-۲}\alpha^۲ + \cdots\right] + \cdots +$$
$$a_{k-۱}(x+\alpha) + a_k$$
$$= a_۰x^k + a_۱x^{k-۱} + \cdots + a_k +$$
$$\alpha\left[ka_۰x^{k-۱} + (k-۱)a_۱x^{k-۲} + \cdots + a_{k-۱}\right] + \cdots.$$

با مقایسه‌ی این معادله با (۵۳)،

$$f(x+\alpha) = f(x) + \alpha f'(x) + \cdots,$$

می‌توانیم نتیجه‌ی زیر را بیان کنیم:

مشتق یک *چندجمله‌ای*

$$f(x) = a_۰x^k + a_۱x^{k-۱} + \cdots + a_{k-۱}x + a_k \qquad (۵۴)$$

به صورت

$$f'(x) = ka_۰x^{k-۱} + (k-۱)a_۱x^{k-۲} + \cdots + a_{k-۱} \qquad (۵۵)$$

است.

برای نمونه، مشتق چندجمله‌ای

$$f(x) = ۶x^۷ + ۸x^۳ - ۳x^۲ - ۱$$

عبارت است از

$$f'(x) = ۴۲x^۶ + ۲۴x^۲ - ۶x.$$

۱۴ روش نیوتن برای حل تقریبی معادلات جبری

اکنون به حل تقریبی معادلات جبری باز می‌گردیم. فرض کنید معادله‌ای به صورت

$$a_۰ x^k + a_۱ x^{k-۱} + \cdots + a_k = ۰ \qquad (۵۶)$$

داریم. تصور کنید که به طریقی توانسته‌ایم یک مقدار تقریبی $x_۱$ برای ریشه‌ی این معادله بیابیم. نشان خواهیم داد که یک مقدار دقیق‌تر این ریشه را چگونه می‌توان به دست آورد. فرض کنید $\alpha_۱$ خطای مقدار $x_۱$ باشد، یعنی فرض کنید $x_۱ + \alpha_۱$ ریشه‌ی معادله‌ی (۵۶) است. آنگاه باید داشته باشیم:

$$a_۰ (x_۱ + \alpha_۱)^k + a_۱ (x_۱ + \alpha_۱)^{k-۱} + \cdots + a_k = ۰. \qquad (۵۷)$$

به عبارت دیگر،

$$f(x_۱ + \alpha_۱) = ۰.$$

که در اینجا $f(x)$ نشان دهنده‌ی چندجمله‌ای

$$a_۰ x^k + a_۱ x^{k-۱} + \cdots + a_k$$

است.

ولی بر اساس فرمول (۵۳) داریم:

$$f(x_۱ + \alpha_۱) = f(x_۱) + \alpha_۱ f'(x_۱) + \cdots,$$

که در اینجا تعلیق نشان دهنده‌ی جمله‌های حاوی $\alpha_۱^۲, \ldots, \alpha_۱^k$ است. لذا برای تعیین $\alpha_۱$، معادله‌ی زیر را داریم:

$$f(x_۱ + \alpha_۱) = f(x_۱) + \alpha_۱ f'(x_۱) + \cdots = ۰. \qquad (۵۸)$$

اگر تقریب اولیه‌ی $x_۱$ به قدر کافی خوب باشد، خطای آن $\alpha_۱$ کوچک خواهد بود. در این صورت جمله‌هایی که در معادله‌ی (۵۸) با تعلیق نشان داده شده‌اند، در مقایسه با $\alpha_۱$ کوچک خواهند بود. با صرف نظر کردن از این جمله‌ها، یک معادله‌ی تقریبی برای تعیین $\alpha_۱$ به دست می‌آوریم:

$$f(x_۱) + \alpha_۱ f'(x_۱) \approx ۰. \qquad (۵۹)$$

از این، نتیجه می‌شود که

$$\alpha_1 \approx -\frac{f(x_1)}{f'(x_1)}. \tag{۶۰}$$

بنا بر این، فرمول مقدار بهبود یافته‌ی x_2 برای ریشه‌ی معادله‌ی ما عبارت خواهد بود از

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)}. \tag{۶۱}$$

آنگاه باز هم می‌توانیم تقریب به دست آمده را بهتر کنیم. فرمول تقریب سوم عبارت است از

$$x_3 = x_2 - \frac{f(x_2)}{f'(x_2)}.$$

به طور کلی، اگر تقریب n-اُم برای ریشه‌ی مورد نظر پیدا شده باشد، آنگاه فرمول تقریب بعدی به صورت زیر خواهد بود:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}. \tag{۶۲}$$

به طور مفصل، فرمول به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{a_0 x_n^k + a_1 x_n^{k-1} + \cdots + a_{k-1} x_n + a_k}{k a_0 x_n^{k-1} + (k-1) a_1 x_n^{k-2} + \cdots + a_{k-1}}. \tag{۶۳}$$

اگر مقادیر تقریبی x_n و x_{n+1} تا دقت تعیین شده بر هم منطبق باشند، فرآیند ما (در محدوده‌ی دقت تعیین شده) اتمام یافته و مقدار ریشه‌ی مورد نظر به دست آمده است.

روش حل معادلات که در بالا شرح داده شد، متعلق به نیوتن، ریاضی‌دان بزرگ انگلیسی، است.

روش نیوتن رابطه‌ی نزدیکی با روش تکرار دارد. به طور خاص، اگر توابع $y = f(x)$ و $y = f'(x)$ هیچ ریشه‌ی مشترکی نداشته باشند، در آن صورت معادله‌ی $f(x) = 0$ معادل با معادله‌ی

$$x = x - \frac{f(x)}{f'(x)} \tag{۶۴}$$

خواهد بود. با اعمال روش تکرار بر این معادله، دنباله‌ای از اعداد به صورت $x_1, x_2, \ldots, x_n$ به دست می‌آوریم، که با همان رابطه‌ی روش نیوتن، یعنی

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \tag{۶۵}$$

با یکدیگر مرتبط هستند. به عبارت دیگر، روش نیوتن به معنای نوشتن معادله‌ی $f(x) = 0$ به شکل (۶۴) و اعمال کردن روش تکرار بر آن است.

مثال: از روش نیوتن برای حل معادله‌ی

$$x^3 - 3x - 5 = 0$$

با دقت ۰٫۰۰۱ و با در نظر گرفتن $x_1 = 3$ به عنوان تقریب اول استفاده کنید.

از آنجا که مشتق چندجمله‌ای

$$f(x) = x^{۳} - ۳x - ۵$$

چندجمله‌ای

$$f'(x) = ۳x^{۲} - ۳$$

است، لذا فرمول (۶۲) به شکل زیر در می‌آید:

$$x_{n+۱} = x_n - \frac{x_n^{۳} - ۳x_n - ۵}{۳x_n^{۲} - ۳}.$$

بنا بر این،

$$x_{۲} = ۳ - \frac{۲۷ - ۹ - ۵}{۲۷ - ۳} = ۳ - \frac{۱۳}{۲۴} = ۲/۴۶,$$

$$x_{۳} = ۲/۴۶ - \frac{۱۴/۸۹ - ۷/۳۸ - ۵}{۱۸/۱۶ - ۳} = ۲/۴۶ - ۰/۱۶۵ = ۲/۲۹۵,$$

$$x_{۴} = ۲/۲۹۵ - \frac{۱۲/۰۸۸ - ۶/۸۸۵ - ۵}{۱۵/۸۰۱ - ۳} = ۲/۲۹۵ - ۰/۰۱۶ = ۲/۲۷۹,$$

$$x_{۵} = ۲/۲۷۹ - \frac{۱۱/۸۳۷ - ۶/۸۰۷ - ۵}{۱۵/۵۸۲ - ۳} = ۲/۲۷۹.$$

می‌بینیم که با دقت ۰/۰۰۱،

$$x_{۴} = x_{۵}.$$

بنا بر این، ریشه‌ی معادله‌ی $x^{۳} - ۳x - ۵ = ۰$ با دقت ۰/۰۰۱ برابر با ۲/۲۷۹ است.

روش محاسبه‌ی تقریبی ریشه‌ها که در قسمت ۶ ارائه شد، حالت خاصی از روش نیوتن است. در حقیقت، پیدا کردن $\sqrt[k]{a}$ صرفاً به معنای حل معادله‌ی

$$x^k - a = ۰$$

است. ولی مشتق چندجمله‌ای $x^k - a$، برابر با $kx^{k-۱}$ است، و بنا بر این، فرمول (۶۲) برای معادله‌ی

$$x^k - a = ۰$$

به صورت زیر است:

$$x_{n+۱} = x_n - \frac{x_n^k - a}{kx_n^{k-۱}} = \frac{a + (k-۱)x_n^k}{kx_n^{k-۱}}.$$

این درست همان فرمولی است که برای محاسبه‌ی تقریبی $\sqrt[k]{a}$ استفاده شد.

دقت کنید که حل معادله‌ی $x^n - a = ۰$ و حل معادله‌ی جبری عمومی

$$a_۰ x^k + a_۱ x^{k-۱} + \cdots + a_k = ۰$$

یک تفاوت اساسی دارد. برای معادله‌ی $x^n - a = ۰$، انتخاب تقریب اولیه‌ی $x_۱$ هیچ اهمیتی نداشت. هر مقداری برای $x_۱$ انتخاب می‌شد، پس از چند مرحله مقدار $\sqrt[k]{a}$ با دقت لازم به دست می‌آمد. در مورد حل معادله‌ی (۵۶) وضعیت متفاوت است. در اینجا، یک مقدار اولیه به یک ریشه منتهی می‌شود، یک مقدار اولیه‌ی دیگر به یک ریشه‌ی دیگر منجر می‌شود، و بعضی مقادیر اولیه اصلاً به مقدار معینی منتهی نمی‌شوند—در این موارد، دنباله‌ی اعداد $x_۱, x_۲, , x_n$ که با استفاده از فرمول (۶۲) محاسبه می‌شود، به هیچ حد معینی میل نمی‌کند، یعنی واگرا است.

۱۵ معنای هندسی مشتق

تا اینجا روش نیوتن را فقط برای معادلات جبری بیان کردیم. به منظور تعمیم آن به معادلات با شکل دلخواه، باید مفهوم مشتق را تعمیم دهیم و آن را برای تمام انواع توابع تعریف کنیم. برای این منظور، معنای هندسی مشتق را توضیح می‌دهیم.

نمودار چندجمله‌ای

$$y = a_\circ x^k + a_۱ x^{k-۱} + \cdots + a_k$$

را در نظر بگیرید، و دو نقطه‌ی M و N را روی این نمودار در نظر بگیرید (شکل ۱۲). فرض کنید که طول نقطه‌ی M، x، و طول نقطه‌ی N، $x + \alpha$ باشد. آنگاه عرض نقطه‌های M و N به ترتیب از عبارت‌های

$$f(x) = a_\circ x^k + a_۱ x^{k-۱} + \cdots + a_k$$

و

$$f(x+\alpha) = a_\circ (x+\alpha)^k + a_۱ (x+\alpha)^{k-۱} + \cdots + a_k$$

به دست می‌آید. یک خط قاطع از نقطه‌های M و N بکشید و شیب آن قاطعk را حساب کنید.* از شکل می‌توان دید که

$$\tan\psi = \frac{TN}{MT}.$$

ولی پاره‌خط MT برابر با تفاضل طول نقطه‌های M و N است، و بنا بر این،

$$MT = (x+\alpha) - x = \alpha.$$

پاره‌خط TN برابر با تفاضل عرض این دو نقطه است، و بنا بر این،

$$TN = f(x+\alpha) - f(x).$$

نتیجه می‌شود که

$$\tan\psi = \frac{TN}{MT} = \frac{f(x+\alpha) - f(x)}{\alpha}.$$

ولی بنا به فرمول (۵۳)،

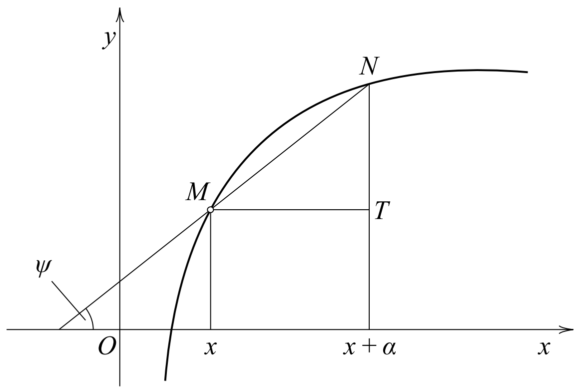
$$f(x+\alpha) = f(x) + \alpha f'(x) + \cdots,$$

که در اینجا سه‌نقطه نشان دهنده‌ی جملات حاوی $\alpha^{۲}, \alpha^{۳}, \ldots$ است. بنا بر این،

$$\tan\psi = \frac{\alpha f'(x) + \cdots}{\alpha} = f'(x) + \cdots,$$

که در اینجا سه‌نقطه نشان دهنده‌ی جملات حاوی $\alpha, \alpha^{۲}, \ldots$ است.

* منظور از شیب یک *خط*، تانژانت زاویه‌ی تمایل خط نسبت به جهت مثبت محور x است. مثلاً اگر خطی با محور x، زاویه‌ی ۶۰° بسازد، آنگاه شیب آن برابر با $\sqrt{۳}$ است.



شکل ۱۲

بنا بر این، شیب خط قاطع MN با فرمول زیر بیان می‌شود:

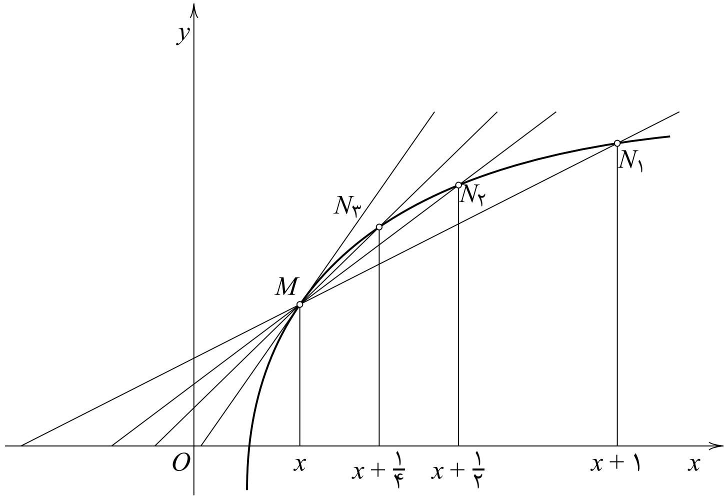
$$k_{\text{قاطع}} = \tan\psi = f'(x) + \cdots. \tag{۶۶}$$

حالا به تدریج مقدار α را کم می‌کنیم. با این کار، خط قاطع MN حول نقطه‌ی M خواهد چرخید. در حالت محدود کننده، وقتی که $\alpha = ۰$، خط قاطع تبدیل به مماس بر منحنی $y = f(x)$ در نقطه‌ی M خواهد شد. شکل ۱۳ موقعیت خط قاطع را برای $\alpha = ۱, ۱/۲, ۱/۴$ نشان می‌دهد.

ولی وقتی که $\alpha = ۰$، همه‌ی جملات نشان داده شده با سه‌نقطه در فرمول (۶۶) صفر می‌شود. لذا شیب مماس بر نمودار یک چندجمله‌ای $y = f(x)$ در نقطه‌ی با طول x با فرمول زیر بیان می‌شود:

$$k_{\text{مماس}} = f'(x) \tag{۶۷}$$

بنا بر این، مشتق یک چندجمله‌ای $f(x)$ *برابر با شیب مماس بر منحنی چندجمله‌ای در نقطه‌ی با طول x است.*



شکل ۱۳

مثال: زاویه‌ای را که مماس بر نمودار چندجمله‌ای

$$f(x) = x^۳ - ۴x^۲ + ۵x + ۱$$

رسم شده در نقطه‌ی $x = ۲$ با محور x می‌سازد، پیدا کنید.

از آنجا که

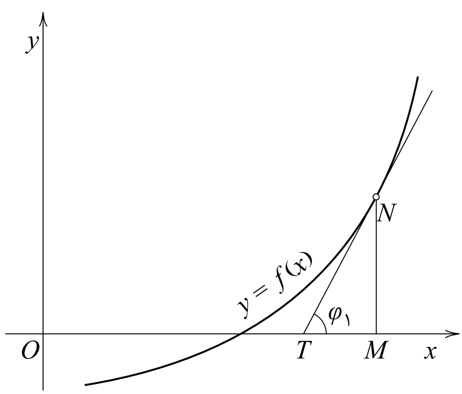
$$f'(x) = ۳x^۲ - ۸x + ۵,$$

لذا $f'(۲) = ۱$. در نتیجه، $\tan\varphi = ۱$ و بنا بر این، زاویه‌ی مورد نظر $\varphi = ۴۵°$ است.

۱۶ معنای هندسی روش نیوتن

اکنون می‌توانیم معنای هندسی روش نیوتن برای حل تقریبی معادلات جبری را روشن کنیم. فرض کنید می‌خواهیم معادله‌ی $f(x)=0$ را حل کنیم، که در اینجا $f(x)$ یک چندجمله‌ای است. از نظر هندسی، این مسئله، مسئله‌ی پیدا کردن نقاط تقاطع تابع $y=f(x)$ با محور x است، یعنی نقطه‌هایی که در آن $y=0$.

فرض کنید یک مقدار تقریبی ریشه‌ی این معادله، x_1، قبلاً پیدا شده است. در نقطه‌ی N با مختصه‌ی افقی x_1، مماسی بر منحنی $y=f(x)$ رسم کنید. اگر در انتخاب x_1 شانس داشته باشیم، نقطه‌ی T محل تقاطع مماس با محور x نسبت به نقطه‌ی M به نقطه‌ی تقاطع منحنی $y=f(x)$ با محور x نزدیک‌تر خواهد بود (شکل ۱۴).



شکل ۱۴

برای پیدا کردن مختصه‌ی افقی x_2 نقطه‌ی T، مثلث TMN را در نظر بگیرید. ضلع MN این مثلث قائم‌الزاویه همان مقدار تابع $y=f(x)$ در نقطه‌ی x_1 است، یعنی $MN=f(x_1)$. از سوی دیگر، ضلع TM برابر است با x_1-x_2. لذا تانژانت زاویه‌ی φ_1 که خط مماس با محور x می‌سازد، با فرمول زیر بیان می‌شود:

$$\tan\varphi_1 = \frac{f(x_1)}{x_1 - x_2}. \qquad (۶۸)$$

از (۶۸) نتیجه می‌شود که

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{\tan\varphi_1}. \qquad (۶۹)$$

ولی $\tan\varphi_1$ شیب مماس بر منحنی $y = f(x)$ است که در نقطه‌ی با مختصه‌ی افقی x رسم شده است. بنا بر این، مطابق با معنای هندسی مشتق، $\tan\varphi_1 = f'(x_1)$.

لذا فرمول (۶۹) را می‌توان به شکل زیر نوشت:

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)}.$$

بنا بر این، تقریب دوم برای ریشه‌ی مورد نظر را به دست می‌آوریم. حال در نقطه‌ی با مختصه‌ی افقی x_2، مماسی بر منحنی $y = f(x)$ رسم می‌کنیم. مختصه‌ی افقی نقطه‌ی تقاطع این مماس با محور x با فرمول زیر به دست می‌آید:

$$x_3 = x_2 - \frac{f(x_2)}{f'(x_2)}.$$

به طور کلی، اگر تقریب x_n قبلاً به دست آمده باشد، آنگاه برای به دست آوردن تقریب بعدی x_{n+1}، باید در نقطه‌ی با مختصه‌ی افقی x_n، مماسی بر منحنی $y = f(x)$ رسم کنیم. آنگاه، مختصه‌ی افقی نقطه‌ی تقاطع این مماس با محور x، مقدار x_{n+1} را به ما می‌دهد.

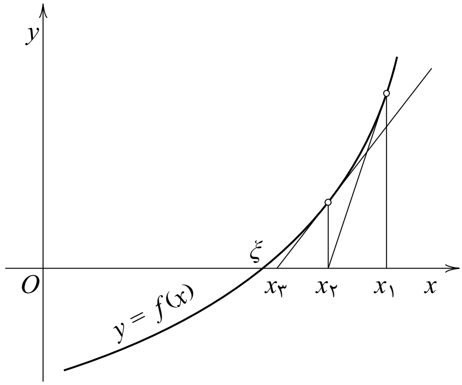
فرمول محاسبه‌ی x_{n+1} عبارت است از

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}, \qquad (۷۰)$$

و یا معادل آن

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{\tan\varphi_n}, \qquad (۷۰')$$

که در اینجا φ_n زاویه‌ی مماس بر منحنی در نقطه‌ی با مختصه‌ی افقی x_n با محور x است. این فرمول همان فرمول (۶۲) روش نیوتن است. به این ترتیب، ما به معنای هندسی روش نیوتن پی بردیم. اساس آن، جایگزینی مماس بر منحنی به جای قوس منحنی است. بدین خاطر، نام دیگر روش نیوتن، *روش مماس‌ها* است.



شکل ۱۵

شکل ۱۵ نشان می‌دهد که نقاط $x_۱, x_۲, \ldots, x_n$، که با استفاده از روش نیوتن به دست آمده‌اند، به نقطه‌ی ξ محل تقاطع منحنی $y = f(x)$ با محور x نزدیک می‌شوند.

۱۷ مشتق توابع دلخواه

تفسیر هندسی روش نیوتن که در بالا ارائه شد، این امکان را به ما می‌دهد که آن را تعمیم دهیم تا بتوانیم بر معادله‌هایی که به شکل $y = f(x)$ هستند، اعمال کنیم، که حالا $f(x)$ می‌تواند تابعی غیر از یک چندجمله‌ای نیز باشد. برای پیدا کردن جواب این معادله، یک مقدار تقریبی x_1 را برای ریشه‌ی آن انتخاب کنید. مماس بر منحنی $y = f(x)$ را در نقطه‌ی با طول x_1 رسم کنید و نقطه‌ی تقاطع آن با محور x را با x_2 نشان دهید. حال یک مماس جدید بر منحنی $y = f(x)$ در نقطه‌ی با طول x_2 رسم کنید، و الی آخر. به آسانی می‌توان فهمید که همانند حالت چندجمله‌ای،

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{\tan\varphi_n}, \qquad (۷۱)$$

که در اینجا $\tan\varphi_n$ شیب مماس بر منحنی $y = f(x)$ در نقطه‌ی با طول x_n است.

فرمول (۷۱) هنوز هم فایده‌ای برای محاسبات ندارد، چون نمی‌دانیم $\tan\varphi_n$ را چگونه پیدا کنیم. پس باید یاد بگیریم که شیب مماس بر نمودار یک تابع دلخواه $y = f(x)$ (و نه فقط نمودار چندجمله‌ای‌ها) را حساب کنیم. ابتدا شیب خط قاطع را محاسبه می‌کنیم. فرض کنید M نقطه‌ای روی نمودار تابع $y = f(x)$ باشد و MN خط قاطعی باشد که از این نقطه می‌گذارد. با اعمال همان استدلالی که در مورد چندجمله‌ای‌ها گفتیم، نتیجه می‌گیریم که شیب خط قاطع از فرمول زیر به دست می‌آید:

$$k_{\text{قاطع}} = \tan\psi = \frac{f(x+\alpha) - f(x)}{\alpha}, \qquad (۷۲)$$

که در اینجا x طول نقطه‌ی M و $x+\alpha$ طول نقطه‌ی N است. اگر α را کاهش دهیم، خط قاطع حول نقطه‌ی M خواهد چرخید تا آنکه در نهایت، در موقعیت خط مماس بر منحنی $y = f(x)$ در این نقطه قرار گیرد (رک. شکل ۱۲). بنا بر این، می‌توانیم بنویسیم که

$$k_{\text{مماس}} = \tan\varphi = \underset{\alpha\to 0}{\text{حد}} \frac{f(x+\alpha) - f(x)}{\alpha}. \qquad (۷۳)$$

به حد سمت راست مشتق تابع $f(x)$ می‌گوییم و آن را با $f'(x)$ نشان می‌دهیم، یعنی قرار

می‌دهیم:

$$f'(x) = \underset{\alpha \to ۰}{\text{حد}} \frac{f(x+\alpha) - f(x)}{\alpha}. \qquad (۷۴)$$

اکنون می‌توانیم تساوی (۷۳) را به شکل زیر بنویسیم:

$$k_{\text{مماس}} = \tan\varphi = f'(x). \qquad (۷۵)$$

به این ترتیب، مشتق $f'(x)$ هر تابع در یک نقطه (نه فقط توابع چندجمله‌ای) برابر با شیب مماس رسم شده بر منحنی $y = f(x)$ در آن نقطه است.*

* اگر در نقطه‌ای به طول x امکان رسم مماس بر منحنی $y = f(x)$ وجود نداشته باشد (مثلاً نمودار تابع در این نقطه شکستگی داشته باشد، یعنی با زاویه‌ی تندی در آنجا خم شده باشد)، آنگاه تابع در آن نقطه مشتق ندارد.

از آنجا که $\tan(\varphi_n) = f'(x_n)$، لذا فرمول (۷۱) را می‌توان به صورت زیر بازنویسی کرد:

$$x_{n+۱} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}. \qquad (۷۶)$$

این فرمول همان فرمول (۶۲) است. بنا بر این، روش نیوتن به همه‌ی معادلات به شکل $y = f(x)$ بسط داده شد.

۱۸ محاسبه‌ی مشتق

در قسمت قبل دیدیم که برای پیدا کردن شیب مماس بر منحنی $y = f(x)$، باید حد زیر را محاسبه کنیم:

$$f'(x) = \underset{\alpha \to ۰}{\text{حد}} \frac{f(x+\alpha) - f(x)}{\alpha}.$$

این محاسبه در حالت کلی خیلی مشکل است. ولی برای بسیاری از موارد مهم، این حد از قبل مشخص شده است. به عبارت دیگر، مشتق توابع پراستفاده شناخته شده است. در زیر لیستی از مشتقات توابع مهم را می‌بینید:

۱. $(a)' = ۰,$

۲. $\left(x^k\right)' = kx^{k-۱},$

۳. $(a^x)' = a^x \ln a,$

۴. $(\sin ax)' = a\cos ax,$

۵. $(\cos ax)' = -a\sin ax,$

۶. $(\tan ax)' = \frac{a}{\cos^۲ ax},$

۷. $(\cot ax)' = -\frac{a}{\sin^۲ ax},$

۸. $\left(\log_a x\right)' = \frac{۱}{x\ln a},$

۹. $(\arcsin ax)' = \frac{a}{\sqrt{۱-a^۲x^۲}},$

۱۰. $(\arctan ax)' = \frac{a}{۱+a^۲x^۲}.$

($\ln a$ در فرمول‌های ۳ و ۸ نشان دهنده‌ی لگاریتم به مبنای $e = ۲/۷۱۸۲۸\ldots$ است که اصطلاحاً به آن *لگاریتم طبیعی* یا *نپری (Napierian)* می‌گویند). دقت کنید که k در فرمول ۲ می‌تواند نه تنها یک عدد طبیعی بلکه هر عدد حقیقی باشد. به عنوان مثال،

$$\left(\sqrt{x}\right)' = \left(x^{\frac{۱}{۲}}\right)' = \frac{۱}{۲}x^{\frac{۱}{۲}-۱} = \frac{۱}{۲\sqrt{x}},$$

$$\left(\frac{۱}{x^۲}\right)' = \left(x^{-۲}\right)' = -۲x^{-۳} = -\frac{۲}{x^۳}.$$

فرمول‌های ۱-۱۰ برای محاسبه‌ی مشتق تمام توابع کافی نیستند. اما اگر تابع $f(x)$ با استفاده از

عمل‌های حسابی روی توابعی که مشتق آنها را می‌توانیم پیدا کنیم، ایجاد شده باشد، به آسانی می‌توانیم مشتق آن را پیدا کنیم. برای این کار، از قواعد زیر که اثبات آنها (به همراه اثبات فرمول‌های ۱۰-۱) در کتاب‌های ریاضیات عالی آمده است، استفاده می‌کنیم.

۱. *مشتق مجموع دو تابع برابر است با مجموع مشتق‌های آنها، یعنی*

$$\left[f_{۱}(x)+f_{۲}(x)\right]'=f_{۱}'(x)+f_{۲}'(x).$$

۲. *یک ضریب ثابت را می‌توان به بیرون از علامت مشتق برد:*

$$\left[af(x)\right]'=af'(x).$$

۳. *فرمول محاسبه‌ی مشتق حاصلضرب دو تابع عبارت است از*

$$\left[f_{۱}(x)f_{۲}(x)\right]'=f_{۱}'(x)f_{۲}(x)+f_{۱}(x)f_{۲}'(x).$$

۴. *فرمول محاسبه‌ی مشتق یک کسر عبارت است از*

$$\left[\frac{f_{۱}(x)}{f_{۲}(x)}\right]'=\frac{f_{۱}'(x)f_{۲}(x)-f_{۱}(x)f_{۲}'(x)}{\left[f_{۲}'(x)\right]^{۲}}.$$

قاعده‌ی ارائه شده در قسمت ۱۳ برای محاسبه‌ی مشتق یک چندجمله‌ای، نتیجه‌ای از قاعده‌های ۱ و ۲ و فرمول ۲ لیست است.

مثال ۱: مشتق کسر زیر را پیدا کنید

$$f(x)=\frac{۳x^{۲}-x+۱}{۲x^{۳}+۵}.$$

با اعمال قاعده‌ی ۴ داریم:

$$f'(x)=\frac{(۳x^{۲}-x+۱)'(۲x^{۳}+۵)-(۳x^{۲}-x+۱)(۲x^{۳}+۵)'}{(۲x^{۳}+۵)^{۲}}.$$

حال با اعمال قاعده‌ی مشتق‌گیری از چندجمله‌ای، داریم

$$\left(۳x^{۲}-x+۱\right)'=۶x-۱,$$

و

$$\left(۲x^{۳}+۵\right)'=۶x^{۲},$$

و بنا بر این،

$$f'(x)=\frac{(۲x^۳+۵)(۶x-۱)-(۳x^۲-x+۱)۶x^۲}{(۲x^۳+۵)^۲}$$

$$=\frac{-۶x^۴+۴x^۳+۶x^۲+۳۰x-۵}{(۲x^۳+۵)^۲}.$$

مثال ۲: مشتق تابع زیر را پیدا کنید

$$f(x)=\frac{۱}{۱۰}\left(\arcsin ۳x-\frac{۱}{x^۲}\right).$$

حل: با استفاده از فرمول‌های ۲ و ۹ و قواعد ۱ و ۲ داریم

$$f'(x)=\frac{۱}{۱۰}\,\frac{۳}{\sqrt{۱-۹x^۲}}-\frac{۱}{۱۰}\left(\frac{-۲}{x^۳}\right)=\frac{۳}{۱۰\sqrt{۱-۹x^۲}}+\frac{۱}{۵x^۳}.$$

مثال ۳: مشتق تابع

$$f(x)=۱۰^x\sin ۲x$$

را پیدا کنید.

با اعمال قاعده‌ی ۳ و فرمول‌های ۳ و ۴، داریم

$$f'(x)=(۱۰^x)'\sin ۲x+۱۰^x(\sin ۲x)'$$

$$=۱۰^x\sin ۲x\ln ۱۰+۱۰^x\cdot ۲\cos ۲x$$

$$=۱۰^x(\sin ۲x\ln ۱۰+۲\cos ۲x).$$

قواعدی که در بالا ارائه شد، به ما امکان می‌دهد که مشتق را در بسیاری از موارد به دست آوریم. یک قاعده‌ی بسیار مهم دیگر نیز وجود دارد—قاعده‌ی محاسبه‌ی مشتق یک تابع مرکب. این قاعده به صورت زیر بیان می‌شود:

اگر یک تابع $y=f(x)$ را بتوان به شکل $y=F(z)$ نوشت که در اینجا $z=\varphi(x)$، آنگاه مشتق آن از فرمول

$$f'(x)=F'(z)\varphi'(x) \tag{۷۷}$$

به دست می‌آید که در اینجا $z=\varphi(x)$.

مثال: مشتق تابع $y=\sin(x^۳)$ را به دست آورید. این تابع را می‌توان به صورت $y=\sin z$ نوشت، که در اینجا $z=x^۳$. مشتق تابع $F(z)=\sin z$ به صورت $F'(z)=\cos z$ است، و مشتق تابع $\varphi(x)=x^۳$ به صورت $\varphi'(x)=۳x^۲$ است. با استفاده از فرمول (۷۷)، داریم

$$[\sin(x^۳)]'=F'(z)\varphi'(x)=\cos z\cdot ۳x^۲.$$

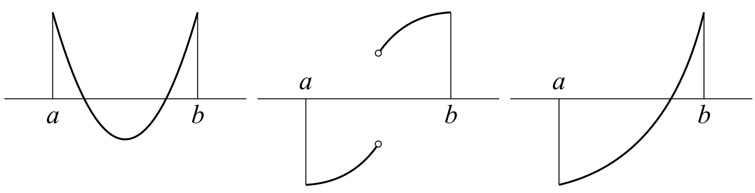
پس از جایگزین کردن z با مقدار آن $z = x^{۳}$ داریم

$$[\sin(x^{۳})]' = = ۳x^{۲}\cos(x^{۳}).$$

خواننده می‌تواند برای توضیح مفصل‌تر مفهوم مشتق، مثلاً به کتاب *ریاضیات عالی برای مبتدیان* (*«Высшая математика для начинающих»*) نوشته‌ی یا. ب. زلدوویچ (Я. Б. Зельдович) مراجعه کند.

۱۹ پیدا کردن تقریب اول

اکنون به بررسی چگونگی انتخاب تقریب اول می‌پردازیم. هنگام حل معادله‌ی $f(x) = ۰$، تقریب اول را می‌توان با استفاده از نمودار به دست آورد. برای این منظور، باید نمودار $y = f(x)$ را رسم کنیم و نقاط تقاطع نمودار با محور x را پیدا کنیم (در این نقطه‌ها $y = ۰$ و بنا بر این، $f(x) = ۰$).
اگر به هر دلیل کشیدن نمودار تابع دشوار باشد (مثلاً وقتی که معادله توسط رایانه حل می‌شود)، روش دیگری برای پیدا کردن تقریب اول به کار گرفته می‌شود. در این روش، مقادیر تابع برای برخی از مقادیر آوندهای آن محاسبه می‌شود (مثلاً برای مقادیر صحیح آوند که در داخل کران‌های معینی واقع است). اگر تابع $y = f(x)$ پیوسته باشد (یعنی نمودار آن هیچگونه گسستگی نداشته باشد)، آنگاه یک ریشه‌ی معادله‌ی $f(x) = ۰$ بین مقادیر a و b آوند که مقدار تابع برای آنها علامت مخالف اتخاذ می‌کند، وجود دارد (شکل ۱۶a). اگر نمودار تابع دارای گسستگی باشد، امکان دارد که تابع از مقادیر منفی به مقادیر مثبت جهش کند، بدون اینکه در این اثنا از صفر عبور کند (شکل ۱۶b). مقدارهای a یا b را می‌توان به عنوان تقریب اول برای ریشه‌ی معادله‌ی $f(x) = ۰$ انتخاب کرد.

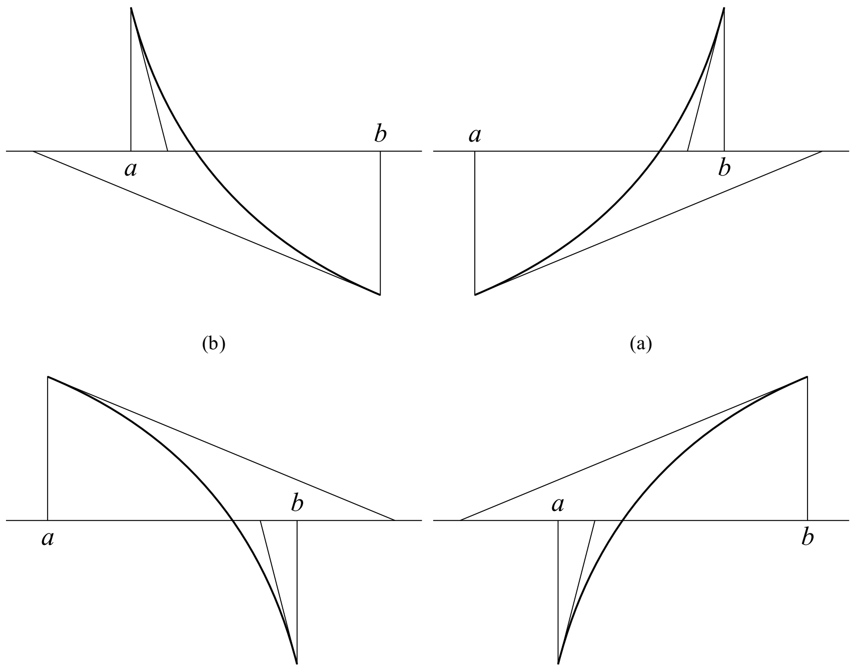


(c) (b) (a)

شکل ۱۶

دقت کنید که با این روش، ممکن است بعضی از ریشه‌های معادله از نظر دور بماند. مثلاً شکل ۱۶c حالتی را نشان می‌دهد که تابع $y = f(x)$ در دو نقطه علامت یکسانی دارد، ولی بین آنها صفر می‌شود.
به این ترتیب، دو نقطه را به دست آورده‌ایم: a و b. برای اینکه ببینیم کدامیک از آنها را باید به

عنوان تقریب اول x در روش نیوتن انتخاب کنیم، شکل ۱۷ را در نظر بگیرید. شکل‌های ۱۷a و ۱۷b نشان می‌دهند که *اگر تقعر منحنی به طرف بالا باشد، هر یک از دو نقطه‌ی* a *و* b *که تابع* $f(x)$ *برای آن مثبت است، باید به عنوان تقریب اولیه انتخاب شود. انتخاب دیگر به عنوان تقریب اولیه حتی ممکن است منجر به آن شود که نقطه‌ی* $x_۲$ *بیرون از بازه‌ی* $[a,b]$ *باشد.* به همین ترتیب، *اگر تقعر منحنی به طرف پایین باشد، نقطه‌ای که در آن تابع* $f(x)$ *منفی است (شکل* ۱۷c *و* ۱۷d*)، باید به عنوان تقریب اولیه انتخاب شود.*



(b) (a)

(d) (c)

شکل ۱۷

اگر نمودار تابع $y = f(x)$ معلوم باشد، به راحتی می‌توان از این قاعده استفاده کرد. اما اگر نمودار تابع ترسیم نشده باشد، آنگاه برای تعیین جهت تقعر تابع، محاسبات بیشتری مورد نیاز است. برای انجام این کار باید مشتق دوم تابع $f(x)$ تعیین شود. منظور از مشتق دوم *تابع* $f(x)$، مشتق مشتق اول آن است.

برای نمونه، اگر تابع

$$f(x) = x^۳ - ۴x^۲ + ۳x - ۱$$

به ما داده شده باشد، مشتق اول آن

$$f'(x) = ۳x^۲ - ۸x + ۳$$

و مشتق دوم آن

$$f''(x) = ۶x - ۸$$

است.

در دوره‌های ریاضیات عالی، ثابت می‌شود که اگر مشتق دوم مثبت باشد، تقعر منحنی روی این بازه به طرف بالا است. اما اگر مشتق دوم در بازه‌ی $[a, b]$ منفی باشد، تقعر منحنی به طرف پایین است. با استفاده از این اطلاعات، قاعده‌ی زیر را برای کاربرد روش نیوتن به دست می‌آوریم:

فرض کنید تابع $f(x)$ در نقاط a و b علامت‌های مخالف داشته باشد، و و فرض کنید مشتق دوم تابع $f(x)$ روی بازه‌ی $[a, b]$ مثبت باشد. آنگاه برای تقریب اولیه‌ی $x_۱$، باید از میان دو نقطه‌ی a و b، نقطه‌ای را که تابع $f(x)$ برای آن مقدار مثبت اتخاذ می‌کند، انتخاب کرد. از سوی دیگر، اگر مشتق دوم روی بازه‌ی $[a, b]$ منفی باشد، آنگاه نقطه‌ای را که تابع $f(x)$ در آن مقدار منفی اتخاذ می‌کند، باید به عنوان تقریب اولیه‌ی $x_۱$ انتخاب کرد.

۲۰ روش ترکیبی حل معادلات

در حل معادلات، روش نیوتن غالباً با روش وترها ترکیب می‌شود. اگر تقعر نمودار تابع $y = f(x)$ به طرف بالا باشد، آنگاه نقطه‌های a_1 و x_1 با استفاده از فرمول‌های

$$a_1 = a - f(a)\frac{b-a}{f(b)-f(a)}, \qquad (۷۸)$$

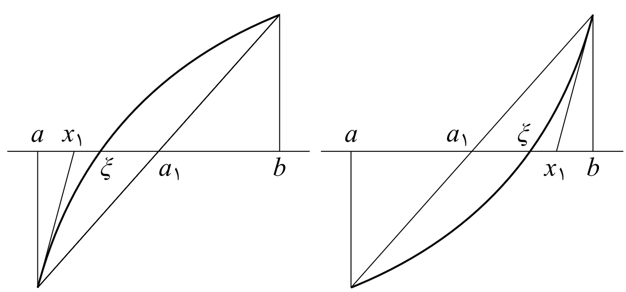
$$x_1 = b - \frac{f(b)}{f'(b)} \qquad (۷۹)$$

تعیین می‌شود. از سوی دیگر، اگر تقعر منحنی $y = f(x)$ به طرف پایین باشد، در آن صورت فرمول (۷۸) برای پیدا کردن نقطه‌ی a_1 استفاده می‌شود و نقطه‌ی x_1 از فرمول

$$x_1 = a - \frac{f(b)}{f'(b)} \qquad (۸۰)$$

به دست می‌آید.

به طوری که از شکل ۱۸a و ۱۸b می‌توان دید، ریشه‌ی ξ معادله‌ی $f(x) = 0$ معمولاً بین نقطه‌های a_1 و x_1 واقع می‌شود. پس از آنکه روش نیوتن و روش وترها دوباره اعمال شد، زوج جدیدی از نقطه‌های a_2 و x_2 به دست می‌آید، و الی آخر.



(b) (a)

شکل ۱۸

به این طریق، دو دنباله‌ی اعداد به دست می‌آید، $\dots a_1, a_2, \dots, a_n \dots$ و $x_1, x_2, \dots, x_n \dots$، که از دو جهت مخالف به ریشه‌ی ξ نزدیک می‌شوند. مزیت روش مذکور در آن است که مقدار تقریبی ریشه را هم از بالا و هم از پایین به دست می‌آورد.

مثال: با استفاده از روش ترکیبی، معادله‌ی

$$x - \sin x - ۰/۵ = ۰$$

را با دقت ۰/۰۰۱ حل کنید.

جدولی از مقادیر تابع پیوسته‌ی

$$f(x) = x - \sin x - ۰/۵$$

ایجاد کنید.

x	-۱	۰	۱	۲
$f(x)$	$-۰/۶۵۹$	$-۰/۵$	$-۰/۳۴۱$	۰/۵۹۱

از این جدول نتیجه می‌شود که ریشه‌ی این معادله بین ۱ و ۲ واقع است. با استفاده از فرمول‌های ۲ و ۴ قسمت ۱۸ داریم

$$f'(x) = ۱ - \cos x.$$

بنا بر این، فرمول نیوتن در این حالت به شکل زیر در می‌آید:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{x_n - \sin x_n - ۰/۵}{۱ - \cos x_n}. \qquad (۸۱)$$

برای فهمیدن اینکه کدامیک از مقادیر ۱ یا ۲ باید به عنوان برای x_0 در نظر گرفته شود، مشتق دوم تابع $f(x)$ را پیدا می‌کنیم. بنا به فرمول ۵ بخش ۱۸، مشتق دوم این تابع به صورت $f''(x) = \sin x$ است. ولی روی بازه‌ی $[۱, ۲]$، تابع $\sin x$ مثبت است.* در نتیجه، با استفاده از قاعده‌ی ذکر شده در بالا، مقدار ۲ که تابع $f(x)$ برای آن مثبت است، باید به عنوان x_0 اتخاذ شود.

* تابع $\sin x$ روی بازه‌ی $[۰, \pi] = [۰, ۳/۱۴۱ \dots]$ مثبت است. بنا بر این، $\sin x$ روی زیربازه‌ی $[۱, ۲]$ از این بازه نیز مثبت است.

بنا به فرمول (۸۱) داریم:

$$x_1 = ۲ - \frac{۲ - \sin ۲ - ۰/۵}{۱ - \cos ۲} = ۲ - \frac{۲ - ۰/۹۰۹ - ۰/۵}{۱ + ۰/۴۱۶} = ۱/۵۸۳.$$

از سوی دیگر، با استفاده از فرمول (۷۸) به دست می‌آوریم

$$a_1 = ۱ - (-۰/۳۴۱) \frac{۲ - ۱}{۰/۵۹۱ - (-۰/۳۴۱)} = ۱/۳۶۶.$$

آنگاه، با اعمال فرمول‌های (۸۱) و (۷۸) بر بازه‌ی $[a_1, x_1]$ داریم

$$x_۲ = ۱/۵۸۳ - \frac{۱/۵۸۳ - ۱/۰۰۰ - ۰/۵}{۱ + ۰/۰۱۲} = ۱/۵۰۱,$$

و

$$a_۲ = ۱/۳۶۶ + ۰/۱۱۳ \frac{۱/۵۸۳ - ۱/۳۶۶}{۰/۰۸۳ + ۰/۱۱۳} = ۱/۴۹۱.$$

بعد، به دست می‌آوریم

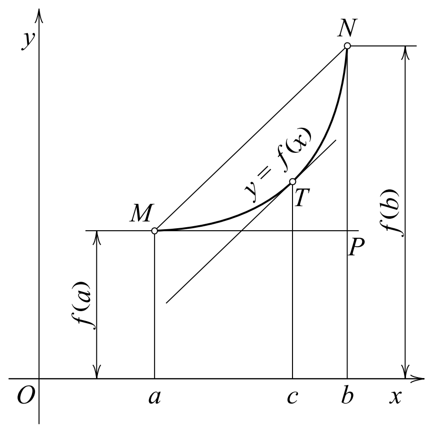
$$x_۳ = ۱/۴۹۸,$$

$$a_۳ = ۱/۴۹۸.$$

لذا ریشه‌ی معادله‌ی ما با دقت ۰/۰۰۱، ۱/۴۹۸ است.

۲۱ آزمون همگرایی برای روش تکرار

اکنون مفهوم مشتق را برای به دست آوردن یک آزمون همگرایی جدید برای روش تکرار به کار می‌گیریم. برای این منظور، به فرمول دیگری به نام فرمول لاگرانژ (Lagrange) نیاز داریم (لاگرانژ یک ریاضی‌دان فرانسوی قرن هجدهم میلادی بود).



شکل ۱۹

منحنی $y = f(x)$ را روی بازه‌ی $[a, b]$ در نظر بگیرید. نقطه‌ی ابتدایی این منحنی را با M و نقطه‌ی انتهایی آن را با N نشان می‌دهیم و وتر MN را رسم می‌کنیم. شیب این وتر عبارت است از

$$k_{\text{وتر}} = \tan\psi = \frac{PN}{MP}$$

(شکل ۱۹). اما $MP = b - a$ و $PN = f(b) - f(a)$، و بنا بر این،

$$k_{\text{وتر}} = \tan\psi = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

اکنون، دورترین نقطه‌ی قوس MN از وتر MN را با T نشان می‌دهیم. اگر از این نقطه خط راستی به موازات وتر بکشیم، بر منحنی مماس خواهد بود، چون اگر منحنی را قطع کند، آنگاه نقاط

دیگری دورتر از وتر MN نسبت به نقطه‌ی T وجود خواهند داشت. به عبارت دیگر، مماس بر منحنی در نقطه‌ی T با وتر MN موازی است، و بنا بر این، شیب آن، همان شیب وتر است. ولی شیب مماس برابر با $f'(c)$ است، که c طول نقطه‌ی T است. بنا بر این، فرمول زیر را داریم:

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}. \qquad (۸۲)$$

این فرمول، فرمول لاگرانژ نامیده می‌شود. دقت کنید که نقطه‌ی c در فرمول لاگرانژ همیشه بین نقاط a و b واقع می‌شود. فرمول لاگرانژ را به صورت زیر نیز می‌توان نوشت:

$$f(b) - f(a) = f'(c)(b - a). \qquad (۸۳)$$

حال به حل معادله‌ی $x = \varphi(x)$ به روش تکرار باز می‌گردیم. فرض کنید نگاشت $y = \varphi(x)$ بازه‌ی $[a, b]$ را به خودش نگاشت می‌کند، به طوری که روی این بازه، نامعادله‌ی $|\varphi'(x)| < q$ برقرار است، که در اینجا q عددی کوچک‌تر از واحد است، $q < ۱$. دو نقطه‌ی $x_۱$ و $x_۲$ از بازه‌ی $[a, b]$ را در نظر بگیرید. آنگاه نقاط $\varphi(x_۱)$ و $\varphi(x_۲)$ نیز به بازه‌ی $[a, b]$ تعلق خواهند داشت. با استفاده از فرمول لاگرانژ داریم:

$$\varphi(x_۲) - \varphi(x_۱) = \varphi'(c)(x_۲ - x_۱),$$

که در اینجا c نقطه‌ای است که بین $x_۱$ و $x_۲$ واقع است و بنا بر این، به بازه‌ی $[a, b]$ تعلق دارد. نامساوی $|\varphi'(c)| < q < ۱$ برقرار است و بنا بر این،

$$|\varphi(x_۲) - \varphi(x_۱)| \le q|x_۲ - x_۱|. \qquad (۸۴)$$

نامعادله‌ی (۸۴) نشان می‌دهد که $\varphi(x)$ یک نگاشت انقباضی است. ولی ما می‌دانیم که اگر $x \to \varphi(x)$ یک نگاشت انقباضی بازه‌ی $[a, b]$ به خودش باشد، آنگاه برای هر نقطه‌ی $x_۰$ از این بازه، دنباله‌ی $x_۰, x_۱, \ldots, x_n, \ldots$، که در آن $x_{n+۱} = \varphi(x_n)$، به ریشه‌ی معادله‌ی $x = \varphi(x)$ همگرا می‌شود. به این ترتیب، ما قضیه‌ی زیر را ثابت کردیم:

قضیه: *فرض کنید تابع $y = \varphi(x)$ نگاشت بازه‌ی $[a, b]$ به خودش باشد و فرض کنید در این بازه، نامعادله‌ی $|\varphi'(x)| < q$، که در اینجا $q < ۱$، برقرار باشد. آنگاه برای هر نقطه‌ی $x_۰$ از بازه‌ی $[a, b]$، دنباله‌ی نقاط $x_۰, x_۱, \ldots, x_n, \ldots$، که در آن $x_{n+۱} = \varphi(x_n)$، به ریشه‌ی معادله‌ی $x = \varphi(x)$ همگرا می‌شود.*

به بیان ساده، معنای این قضیه این است که روش تقریبات متوالی ما را قادر می‌سازد که ریشه‌های ξ معادله‌ی $x = \varphi(x)$ را پیدا کنیم که برای آن نامساوی $|\varphi'(\xi)| < ۱$ تأمین می‌شود. می‌توان گفت که این نقاط، خط شکسته‌ای (چندضلعی بازی) را که فرآیند تکرار را به طور هندسی نشان می‌دهد (رک. بخش ۸) جذب می‌کنند، در حالی که نقاطی که برای آنها $|\varphi'(\xi)| > ۱$، این خط را دفع می‌کنند.

اگر نامعادله‌ی $|\varphi'(x)| < q < ۱$ روی تمام محور اعداد تأمین شود، آنگاه فرآیند تکرار صرف نظر از انتخاب تقریب اولیه‌ی $x_۰$ همگرا می‌شود (رک. بخش ۱۰).

مثال ۱: آیا فرآیند تکرار را می‌توان برای حل معادله‌ی

$$x = \frac{\cos x + \sin x}{۴}$$

به کار برد؟

در این حالت،

$$\varphi(x) = \frac{\cos x + \sin x}{۴}.$$

بنا بر این،

$$\varphi'(x) = \frac{-\sin x + \cos x}{۴}.$$

اما $|\sin x| \le ۱$ و $|\cos x| \le ۱$، بنا بر این،

$$|\varphi'(x)| = \left|\frac{-\sin x + \cos x}{۴}\right| \le \frac{|\sin x| + |\cos x|}{۴} < \frac{۱}{۲},$$

و لذا فرآیند تکرار را می‌توان اعمال کرد.

مثال ۲: آیا فرآیند تکرار را می‌توان برای حل معادله‌ی

$$x = ۴ - ۲^x \qquad (۸۵)$$

به کار برد؟

ریشه‌ی مطلوب در بازه‌ی $[۱, ۲]$ قرار دارد، زیرا تابع پیوسته‌ی $y = x - ۴ + ۲^x$ در این بازه تغییر علامت می‌دهد:

$$۱ - ۴ + ۲^۱ < ۰,$$

اما

$$۱ - ۴ + ۲^۲ > ۰.$$

ولی در این حالت داریم

$$\varphi'(x) = -۲^x \ln ۲.$$

بگذارید عبارت $۲^x \ln ۲$ را در بازه‌ی $[۱, ۲]$ ارزیابی کنیم. اگر

$$۱ \le x \le ۲,$$

آنگاه

$$۲ \le ۲^x \le ۴,$$

و بنا بر این،

$$۲\ln ۲ \leq ۲^x \ln ۲ \leq ۴\ln ۲.$$

از جدول لگاریتم نپری، که پایه‌ی آن $e \approx ۲/۷۸\ldots$ است، در می‌یابیم که $\ln ۲ = ۰/۶۹\ldots$. در نتیجه، روی بازه‌ی $[۱, ۲]$، نامساوی

$$۱/۳۸\ldots \leq ۲^x \ln ۲ \leq ۲/۷۶\ldots$$

برقرار است، و بنا بر این، از فرآیند تکرار نمی‌توان استفاده کرد.

برای اینکه بتوانیم از فرآیند تکرار استفاده کنیم، می‌توانیم معادله‌ی (۸۵) را تبدیل کنیم. آن را به صورت

$$۲^x = ۴ - x$$

بازنویسی می‌کنیم و از دو طرف در مبنای ۲ لگاریتم می‌گیریم. آنگاه خواهیم داشت:

$$x = \log_۲ (۴ - x).$$

در این حالت،

$$\varphi'(x) = -\frac{۱}{(۴ - x)\ln ۲},$$

و روی بازه‌ی $[۱, ۲]$، نامساوی

$$|\varphi'(x)| < \frac{۱}{۲\ln ۲} = \frac{۱}{۱/۳۸} < ۱$$

برقرار است. (خواننده می‌تواند خودش به آسانی این نامساوی را به دست آورد.)

بنا بر این، وقتی که معادله به این صورت نوشته شود، فرآیند تکرار همگرا می‌شود.

۲۲ نرخ همگرایی فرآیند تکرار*

* در دور اول خواندن، می‌توان این بخش را حذف کرد.

اکنون از مشتق تابع $\varphi(x)$ برای به دست آوردن نرخ همگرایی فرآیند تکرار برای حل معادله‌ی $x = \varphi(x)$ استفاده می‌کنیم. می‌خواهیم نرخ کاهش خطاهای $\alpha_n = \xi - x_n$ مربوط به مقادیر تقریبی $x_۱, \ldots, x_n, \ldots$ از ریشه‌ی ξ را بیابیم.

دقت کنید که تساوی‌های $\xi = \varphi(\xi)$ و $x_{n+۱} = \varphi(x_n)$ درست‌اند. از اینها نتیجه می‌شود که

$$\alpha_{n+۱} = \xi - x_{n+۱} = \varphi(\xi) - \varphi(x_n).$$

ولی با استفاده از فرمول لاگرانژ داریم:

$$\varphi(\xi) - \varphi(x_n) = \varphi'(c_n)(\xi - x_n) = \varphi'(c_n)\alpha_n,$$

که در اینجا c_n نقطه‌ای است که بین نقطه‌های x_n و ξ واقع شده است. بنا بر این،

$$\alpha_{n+۱} = \varphi'(c_n)\alpha_n. \qquad (۸۶)$$

نتیجه‌گیری زیر را می‌توان از معادله‌ی (۸۶) به دست آورد:

فرض کنید ξ ریشه‌ی معادله‌ی $x = \varphi(x)$ واقع در بازه‌ی $[a, b]$ باشد. اگر در این بازه نامساوی $|\varphi'(x)| < q < ۱$ تأمین شود، و تقریب اولیه‌ی $x_۱$ نیز در بازه‌ی $[a, b]$ انتخاب شود، آنگاه برای هر n، رابطه‌ی

$$|\alpha_{n+۱}| < q^n|\alpha_۱| \qquad (۸۷)$$

برقرار خواهد بود.

در واقع، از معادله‌ی (۸۶) نتیجه می‌شود که

$$|\alpha_۲| = |\varphi'(c_۱)||\alpha_۱|.$$

ولی نقطه‌ی $c_۱$ در بازه‌ی $[a, b]$ واقع است (شکل ۲۰) و بنا بر این،

$$|\varphi'(c_۱)| < q.$$

از اینجا نتیجه می‌شود که

$$|\alpha_۲| < q|\alpha_۱|.$$

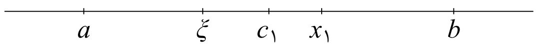
به همان طریق به دست می‌آوریم:

$$|\alpha_3| = |\varphi'(c_2)||\alpha_2| < q|\alpha_2| < q^2|\alpha_1|.$$

و به طور کلی،

$$|\alpha_{n+1}| < q^n|\alpha_1|.$$

این حکم مورد نظر را ثابت می‌کند.



شکل ۲۰

از آنجا که برای $0 < q < 1$، دنباله‌ی اعداد $q, q^2, \ldots, q^n, \ldots$ به سمت صفر میل می‌کند، لذا خطای α_{n+1} نیز با افزایش n به سمت صفر میل می‌کند. به عبارت دیگر، با فرضیات فوق، اعداد $x_1, \ldots, x_n, \ldots$ به عدد ξ نزدیک می‌شوند و تفاضل $\xi - x_{n+1}$ با نرخی بالاتر از $|\alpha_1|q^n$ کم می‌شود.

به همان طریق، می‌توان ثابت کرد که اگر در بازه‌ی $[a, b]$، نامساوی

$$\varphi'(x) > 1$$

برقرار باشد، آنگاه فرآیند تکرار واگرا می‌شود.

نرخ همگرایی فرآیند تکرار در صورتی که مشتق تابع، $\varphi'(x)$، در نقطه‌ی ξ صفر شود، حداکثر است. در این حالت، به تدریج که به ξ نزدیک می‌شویم، $\varphi'(x)$ به سمت صفر میل می‌کند. از آنجا که

$$|\alpha_{n+1}| = |\varphi'(c_n)||\alpha_n|,$$

لذا نرخ همگرایی با نزدیک شدن به نقطه‌ی ξ افزایش می‌یابد.

قبلاً هنگام استفاده از روش تکرار برای استخراج جذر، با موقعیت مشابهی برخورد کردیم. به یاد آورید که ما معادله‌ی $x = \frac{x^2+a}{2x}$ را به جای معادله‌ی $x^2 = a$ جایگزین کردیم. ولی مشتق تابع $\varphi(x) = \frac{x^2+a}{2x}$ عبارت است از

$$\varphi'(x) = \frac{(x^2+a)'2x - (x^2+a)(2x)'}{4x^2} = \frac{2x \cdot 2x - (x^2+a)2}{4x^2} = \frac{x^2-a}{2x^2}$$

[ر.ک. قاعده‌ی ۴ بخش ۱۸ و فرمول (۵۵) بخش ۱۳]، بنا بر این،

$$\varphi'\left(\sqrt{a}\right) = \frac{(\sqrt{a})^2 - a}{2(\sqrt{a})^2} = 0.$$

لذا مشتق تابع $\varphi(x)$ در نقطه‌ی $x = \sqrt{a}$ صفر می‌شود، و این امر، سرعت همگرایی فرآیند را با نزدیک شدن به نقطه‌ی $x = \sqrt{a}$ افزایش می‌دهد.

این افزایش نرخ فرآیند با نزدیک شدن به ریشه‌ی معادله از ویژگی‌های روش نیوتن نیز هست (که یک حالت خاص آن، روش استخراج جذر است که در بالا ذکر شد). در حقیقت، ما قبلاً اشاره کردیم که روش نیوتن شامل جایگزین کردن معادله‌ی $f(x) = ۰$ با معادله‌ی

$$x = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$$

و بعد حل کردن این معادله با روش تقریبات متوالی است. در این حالت، داریم

$$\varphi(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}.$$

اما

$$\varphi'(x) = ۱ - \left[\frac{f(x)}{f'(x)}\right]' = ۱ - \frac{f'(x)\left[f(x)\right]' - f(x)\left[f'(x)\right]'}{\left[f'(x)\right]^{۲}}$$

$$= ۱ - \frac{\left[f'(x)\right]^{۲} - f(x)f''(x)}{\left[f'(x)\right]^{۲}} = \frac{f(x)f''(x)}{\left[f'(x)\right]^{۲}}.$$

از آنجا که در نقطه‌ی ξ، معادله‌ی $f(\xi) = ۰$ تأمین می‌شود، لذا $\varphi'(\xi) = ۰$ و این، به طوری که در بالا نشان داده شد، سرعت همگرایی فرآیند تقریب را با نزدیک شدن به نقطه‌ی ξ افزایش می‌دهد.

۲۳ حل دستگاه‌های معادلات خطی با استفاده از روش تقریبات متوالی

تا اینجا ما معادله‌های یک‌مجهولی را حل می‌کردیم. اکنون به حل دستگاه‌های معادلات می‌پردازیم و ابتدا با دستگاه‌های معادلات درجه‌ی اول شروع می‌کنیم.

فرض کنید m معادله‌ی درجه‌ی اول با m مجهول داریم:*

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1m}x_m = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2m}x_m = b_2, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mm}x_m = b_m. \end{cases} \tag{۸۸}$$

چنین دستگاه‌هایی کاربردهای متعددی دارند. مثلاً وقتی که مساحان نتایج اندازه‌گیری روی مساحت‌های وسیع سطح زمین را ترکیب می‌کنند، گاه باید دستگاه‌های معادلات با چند صد معادله را حل کنند. مهندسانی که سازه‌های صلب طراحی می‌کنند و متخصصان بسیاری از عرصه‌های دیگر نیز می‌بایست اینگونه دستگاه‌های معادلات را حل کنند.

* در این معادلات، ما مجهول‌ها را با حروف $x_1, x_2, \ldots, x_m$ و ضرایب را با حروف a_{ij} نشان می‌دهیم. در اینجا، اندیس اول نشان دهنده‌ی شماره‌ی معادله و اندیس دوم نشان دهنده‌ی شماره‌ی مجهول است. مثلاً، a_{47} ضریب معادله‌ی چهارم در مقابل مجهول هفتم است.

حل این دستگاه‌ها با روش‌های معمول مثلاً با روش حذف مجهول‌ها غالباً بسیار پرزحمت است. ولی روش تقریبات متوالی از قضا بسیار راحت‌تر است. قبل از هر چیز، مثالی از نحوه‌ی انجام این کار را ارائه می‌کنیم.

فرض کنید یک دستگاه معادلات داریم

$$\begin{aligned} 10x_1 - 2x_2 + x_3 &= 9, \\ x_1 + 5x_2 - x_3 &= 8, \\ 4x_1 + 2x_2 + 8x_3 &= 32. \end{aligned}$$

باید مجهول‌های x_1، x_2، و x_3 را با دقت ۰٫۰۱ محاسبه کنیم.

ابتدا معادله‌ی اول را بر حسب x_1، معادله‌ی دوم را بر حسب x_2، و معادله‌ی سوم را بر حسب x_3 بیان می‌کنیم. آنگاه دستگاه معادلات به شکل زیر در می‌آید:

$$\begin{cases} x_1 = 0/9 + 0/2x_2 - 0/1x_3, \\ x_2 = 1/6 - 0/2x_1 + 0/2x_3, \\ x_3 = 4 - 0/5x_1 - 0/25x_2. \end{cases} \quad (89)$$

مقادیر دلخواهی به عنوان تقریب اولیه برای x_1، x_2، و x_3 در نظر بگیرید، مثلاً فرض کنید $x_1^{(0)} = 0$، $x_2^{(0)} = 0$، و $x_3^{(0)} = 0$. این مقادیر را در سمت راست معادله‌های (۸۹) جایگزین کنید و مقادیر به دست آمده را به عنوان مقادیر تقریبی بعدی x_1، x_2، و x_3 در نظر بگیرید. داریم:

$$x_1^{(1)} = 0/9,$$

$$x_2^{(1)} = 1/6,$$

$$x_3^{(1)} = 0/4.$$

دوباره این مقادیر را در سمت راست معادله‌های (۸۹) جایگزین کنید. تقریب‌های بعدی به دست می‌آید:

$$x_1^{(2)} = 0/9 + 0/2 \times 1/6 - 0/1 \times 4 = 0/82,$$

$$x_2^{(2)} = 1/6 - 0/2 \times 0/9 + 0/2 \times 4 = 2/22,$$

$$x_3^{(2)} = 4 - 0/5 \times 0/9 - 0/25 \times 1/6 = 3/15.$$

به طور کلی، اگر مقادیر $x_1^{(n)}$، $x_2^{(n)}$، و $x_3^{(n)}$ به دست آمده باشد، آنگاه برای به دست آوردن تقریب‌های بعدی باید از فرمول‌های زیر استفاده کرد:

$$\begin{cases} x_1^{(n+1)} = 0/9 + 0/2x_2^{(n)} - 0/1x_3^{(n)}, \\ x_2^{(n+1)} = 1/6 - 0/2x_1^{(n)} + 0/2x_3^{(n)}, \\ x_3^{(n+1)} = 4 - 0/5x_1^{(n)} - 0/25x_2^{(n)}. \end{cases} \quad (90)$$

نتایج محاسبه در جدول ۲ ارائه شده است.

جدول ۲

n	۱	۲	۳	۴	۵	۶
$x_1^{(n)}$	۰/۹	۰/۸۲	۱/۰۳	۱/۰۱	۱/۰۰	۱/۰۰

۲/۰۰	۱/۹۹	۲/۰۰	۲/۰۷	۲/۲۲	۱/۶	$x_۲^{(n)}$
۳/۰۰	۳/۰۰	۲/۹۷	۳/۰۳	۳/۱۵	۴/۰	$x_۳^{(n)}$

می‌بینیم که، با دقت مورد نیاز، تساوی‌های زیر برقرار است:

$$x_۱^{(۵)} = x_۱^{(۶)}, \quad x_۲^{(۵)} = x_۲^{(۶)}, \quad x_۳^{(۵)} = x_۳^{(۶)}. \tag{۹۱}$$

با قرار دادن $n = ۵$ در معادله‌ی (۹۰) و در نظر گرفتن تساوی‌های (۹۱)، با دقت مورد نیاز به دست می‌آوریم:

$$x_۱^{(۵)} \approx ۰/۹ + ۰/۲x_۲^{(۵)} - ۰/۱x_۳^{(۵)},$$

$$x_۲^{(۵)} \approx ۱/۶ - ۰/۲x_۱^{(۵)} + ۰/۲x_۳^{(۵)},$$

$$x_۳^{(۵)} \approx ۴ - ۰/۵x_۱^{(۵)} - ۰/۲۵x_۲^{(۵)}.$$

(در حقیقت، در این معادله‌ها تساوی دقیق برقرار است، ولی این اهمیت ندارد). نتیجه می‌شود که اعداد $x_۱^{(۵)} = ۱/۰۰$، $x_۲^{(۵)} = ۲/۰۰$، و $x_۳^{(۵)} = ۳/۰۰$ (با دقت مورد نظر) جواب‌های دستگاه معادلات داده شده هستند.

در حالت کلی نیز از همین روش استفاده می‌شود.* فرض کنید دستگاه معادلات (۸۸) را داریم. در معادله‌ی اول $x_۱$ را خارج می‌کنیم، در معادله‌ی دوم $x_۲$ را، و الی آخر. آنگاه دستگاه معادلات (۸۸) به شکل زیر در می‌آید:

$$\begin{aligned} x_۱ &= \frac{b_۱}{a_{۱۱}} - \frac{a_{۱۲}}{a_{۱۱}} x_۲ - \cdots - \frac{a_{۱m}}{a_{۱۱}} x_m, \\ x_۲ &= \frac{b_۲}{a_{۲۲}} - \frac{a_{۲۱}}{a_{۲۲}} x_۱ - \cdots - \frac{a_{۲m}}{a_{۲۲}} x_m, \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ x_m &= \frac{b_m}{a_{mm}} - \frac{a_{m۱}}{a_{mm}} x_۱ - \frac{a_{m۲}}{a_{mm}} x_۲ - \cdots - \frac{a_{m,m-۱}}{a_{mm}} x_{m-۱}. \end{aligned} \tag{۹۲}$$

فرض کنید $x_۱^{(۱)}, \ldots, x_m^{(۱)}$ تقریب‌های اولیه برای مجهول‌های $x_۱, \ldots, x_m$ باشد.

* از اینجا تا آخر بخش را در دور اول خواندن می‌توانید حذف کنید.

با جایگزینی این مقادیر در سمت راست معادلات (۹۲)، تقریب‌های دوم $x_۱^{(۲)}, \ldots, x_m^{(۲)}$ را برای مجهول‌های مورد نظر به دست می‌آوریم:

$$x_1^{(2)} = \frac{b_1}{a_{11}} - \frac{a_{12}}{a_{11}} x_2^{(1)} - \cdots - \frac{a_{1m}}{a_{11}} x_m^{(1)},$$

$$x_2^{(2)} = \frac{b_2}{a_{22}} - \frac{a_{21}}{a_{22}} x_1^{(1)} - \cdots - \frac{a_{2m}}{a_{22}} x_m^{(1)},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$x_m^{(2)} = \frac{b_m}{a_{mm}} - \frac{a_{m1}}{a_{mm}} x_1^{(1)} - \frac{a_{m2}}{a_{mm}} x_2^{(1)} - \cdots - \frac{a_{m,m-1}}{a_{mm}} x_{m-1}^{(1)}.$$

به همان ترتیب، اگر تقریب n-اُم $x_1^{(n)}, \ldots, x_m^{(n)}$ قبلاً به دست آمده باشد، فرمول‌های به دست آوردن تقریب بعدی به صورت زیر هستند:

$$x_1^{(n+1)} = \frac{b_1}{a_{11}} - \frac{a_{12}}{a_{11}} x_2^{(n)} - \cdots - \frac{a_{1m}}{a_{11}} x_m^{(n)}, \tag{93}$$

$$x_2^{(n+1)} = \frac{b_2}{a_{22}} - \frac{a_{21}}{a_{22}} x_1^{(n)} - \cdots - \frac{a_{2m}}{a_{22}} x_m^{(n)},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$x_m^{(n+1)} = \frac{b_m}{a_{mm}} - \frac{a_{m1}}{a_{mm}} x_1^{(n)} - \frac{a_{m2}}{a_{mm}} x_2^{(n)} - \cdots - \frac{a_{m,m-1}}{a_{mm}} x_{m-1}^{(n)}.$$

اکنون مسئله‌ای را در نظر بگیرید که به حل دستگاه معادلات خطی به روش تقریبات متوالی مربوط نمی‌شود، بلکه به پیدا کردن حالت محدود کننده‌ی یک فرآیند تقریب از طریق حل یک دستگاه معادلات مربوط می‌شود.

سه سطل داریم. سطل اول حاوی ۱۲ لیتر آب است، و سطل‌های دوم و سوم خالی هستند. نصف آب سطل اول در سطل دوم ریخته می‌شود، بعد نصف آب سطل دوم در سطل سوم ریخته می‌شود، آنگاه نصف آب سطل سوم در سطل اول ریخته می‌شود. این چرخه ۲۰ بار تکرار می‌شود. مطلوب است پیدا کنید (با دقت ۰٫۰۰۰۱ L) چقدر آب در هر سطل خواهد بود؟

روشن است که این مسئله با تقریبات متوالی برای توزیع محدود کننده‌ی آب سر و کار دارد. این توزیع محدود کننده به این صورت است که در آن با یک چرخه‌ی ریختن آب، تغییری حاصل نمی‌شود. اگر در آغاز یک چرخه x لیتر آب در سطل اول، y لیتر آب در سطل دوم، و $12 - x - y$ لیتر آب در سطل سوم داشته باشیم (حجم کل آب در نتیجه‌ی ریختن تغییری نمی‌کند)، آنگاه چرخه‌ی فوق با جدول زیر توصیف می‌شود:

	سطل اول	سطل دوم	سطل سوم
وضعیت ابتدایی	x	y	$۱۲-x-y$
پس از ریختن بار اول	$\frac{x}{۲}$	$\frac{x}{۲}+y$	$۱۲-x-y$
پس از ریختن بار دوم	$\frac{x}{۲}$	$\frac{x}{۴}+\frac{y}{۲}$	$۱۲-\frac{۳}{۴}x-\frac{y}{۲}$
پس از ریختن بار سوم	$۶+\frac{x}{۸}-\frac{y}{۴}$	$\frac{x}{۴}+\frac{y}{۲}$	$۶-\frac{۳}{۸}x-\frac{y}{۴}$

برای اینکه به دنبال یک چنین چرخه‌ی آب ریختن، وضعیت آب سطل‌ها تغییری نکند، باید معادلات زیر تأمین شود:

$$x=۶+\frac{x}{۸}-\frac{y}{۴}$$

$$y=\frac{x}{۴}+\frac{y}{۲}$$

با حل این معادلات، می‌بینیم که $x=۶, y=۳$. لذا توزیع محدود کننده به گونه‌ای است که سطل اول حاوی ۶ L آب، سطل دوم حاوی ۳ L آب، و در نتیجه، سطل سوم نیز حاوی ۳ L آب باشد.
حال ببینیم که یک توزیع خاص آب با چه آهنگی به مقادیر محدود کننده نزدیک می‌شود. فرض کنید سطل اول حاوی a لیتر و سطل دوم حاوی b لیتر آب است. پس از یک چرخه،

$$a_۱=۶+\frac{a}{۸}-\frac{b}{۴} \qquad (۹۴)$$

لیتر آب در سطل اول و

$$b_۱=\frac{a}{۴}+\frac{b}{۲} \qquad (۹۵)$$

لیتر آب در سطل دوم وجود خواهد داشت.
$a-۶$ را با α، $b-۳$ را با β، $a_۱-۶$ را با $\alpha_۱$، و $b_۱-۳$ را با $\beta_۱$ نشان دهید. آنگاه، از معادله‌های (۹۴) و (۹۵) نتیجه می‌شود که

$$\alpha_۱=a_۱-۶=\frac{a-۶}{۸}-\frac{b-۳}{۴}=\frac{\alpha}{۸}-\frac{\beta}{۴},$$

و

$$\beta_۱=b_۱-۳=\frac{a-۶}{۴}+\frac{b-۳}{۲}=\frac{\alpha}{۴}+\frac{\beta}{۲}.$$

پس از چرخه‌ی دوم، خطاها با فرمول‌های زیر بیان خواهد شد:

$$\alpha_۲ = \frac{\alpha_۱}{۸} - \frac{\beta_۱}{۴} = \frac{۱}{۸}\left(\frac{\alpha}{۸} - \frac{\beta}{۴}\right) - \frac{۱}{۴}\left(\frac{\alpha}{۴} + \frac{\beta}{۲}\right) = -\frac{۳}{۶۴}\alpha - \frac{۵}{۳۲}\beta,$$

$$\beta_۲ = \frac{\alpha_۱}{۴} + \frac{\beta_۱}{۲} = \frac{۱}{۴}\left(\frac{\alpha}{۸} - \frac{\beta}{۴}\right) + \frac{۱}{۲}\left(\frac{\alpha}{۴} + \frac{\beta}{۲}\right) = \frac{۵}{۳۲}\alpha + \frac{۳}{۱۶}\beta.$$

بنا بر این، اگر $|\alpha| < \varepsilon$ و $|\beta| < \varepsilon$، آنگاه

$$|\alpha_۲| < \frac{۱۳}{۶۴}\varepsilon \approx ۰/۲\varepsilon,$$

$$|\beta_۲| < \frac{۱۱}{۳۲}\varepsilon \approx ۰/۳۴\varepsilon.$$

معنای این مطلب آن است که در دو چرخه‌ی ریختن، خطاهای α و β لااقل سه برابر کاهش می‌یابد. بنا بر این، پس از ۲۰ چرخه، لااقل $۳^{۱۰} \approx ۷۰,۰۰۰$ بار کاهش خواهد یافت. پس با دقت $۰/۰۰۰۱\,\mathrm{L}$، پس از ۲۰ چرخه‌ی ریختن، $۶\,\mathrm{L}$ آب در سطل اول، $۳\,\mathrm{L}$ آب در سطل دوم، و $۳\,\mathrm{L}$ آب نیز در سطل سوم وجود خواهد داشت.

۲۴ حل دستگاه‌های معادلات غیرخطی با استفاده از روش تقریبات متوالی

از روش تقریبات متوالی (تکرار) برای حل دستگاه‌های معادلات غیرخطی نیز می‌توان استفاده کرد. مثلاً دستگاه معادلات زیر را در نظر بگیرید:

$$\begin{cases} x = ۲ + \dfrac{x^{۲} + y}{۲۰} \\ \\ y = ۱ + \dfrac{x + y^{۲}}{۲۰} \end{cases} \qquad (۹۶)$$

به عنوان تقریب اول، در نظر بگیرید $x_{۰} = ۰$ و $y_{۰} = ۰$. با قرار دادن این تقریب‌ها به جای x و y در سمت راست معادله‌ها، تقریب‌های زیر به دست می‌آید: $x_{۱} = ۲$ و $y_{۱} = ۱$. با قرار دادن این تقریب‌ها در سمت راست معادله‌های (۹۶)، داریم:

$$x_{۲} = ۲ + \frac{۲^{۲} + ۱}{۲۰} = ۲/۲۵$$

$$y_{۲} = ۱ + \frac{۲ + ۱^{۲}}{۲۰} = ۱/۱۵$$

با ادامه‌ی این فرآیند داریم:

$$x_۳ = ۲ + \frac{۲/۲۵^۲ + ۱/۱۵}{۲۰} = ۲/۳۱$$

$$y_۳ = ۱ + \frac{۲/۲۵ + ۱/۱۵^۲}{۲۰} = ۱/۱۸$$

$$x_۴ = ۲ + \frac{۲/۳۱^۲ + ۱/۱۸}{۲۰} = ۲/۳۳$$

$$y_۴ = ۱ + \frac{۲/۳۱ + ۱/۱۸^۲}{۲۰} = ۱/۱۸$$

$$x_۵ = ۲ + \frac{۲/۳۳^۲ + ۱/۱۸}{۲۰} = ۲/۳۳$$

$$y_۵ = ۱ + \frac{۲/۳۳ + ۱/۱۸^۲}{۲۰} = ۱/۱۸$$

می‌بینیم که با دقت ۰/۰۱، تساوی‌های $x_۴ = x_۵ = ۲/۳۳$ و $y_۴ = y_۵ = ۱/۱۸$ برقرار هستند. بنا بر این، با دقت فوق‌الذکر داریم $x = ۲/۳۳$ و $y = ۱/۱۸$.

به طور کلی، اگر یک دستگاه معادلات

$$\begin{cases} x = \varphi(x,y) \\ y = \psi(x,y) \end{cases} \qquad (۹۷)$$

داشته باشیم که در اینجا $\varphi(x,y)$ و $\psi(x,y)$ توابع معینی هستند، تقریب‌های اولیه‌ی $x_۰$ و $y_۰$ را انتخاب می‌کنیم، آنها را در طرف راست معادله‌های (۹۷) جایگزین می‌کنیم، و بعد به محاسبه بر اساس فرمول‌های زیر ادامه می‌دهیم:

$$\begin{cases} x_{n+۱} = \varphi(x_n, y_n) \\ y_{n+۱} = \psi(x_n, y_n) \end{cases} \qquad (۹۸)$$

اگر برای یک عدد n تساوی‌های $x_n \approx x_{n+۱}$ و $y_n \approx y_{n+۱}$ با دقت معین تأمین شد، آنگاه با آن دقت تعیین شده داریم $x = x_n$ و $y = y_n$.

دستگاه‌های معادلات حاوی سه مجهول یا بیشتر نیز به همین طریق حل می‌شوند.

اکنون شرایطی را که تضمین کننده‌ی همگرایی فرآیندهای تقریبات متوالی در حل دستگاه‌های معادلات هستند، تعیین می‌کنیم.

فرض می‌کنیم که توابع $\varphi(x,y)$ و $\psi(x,y)$ در دستگاه معادلات (۹۷) برای یک منطقه‌ی بسته‌ی

محصور D از صفحه‌ی x,y تعریف شده‌اند. به عبارت دیگر، فرض می‌کنیم که منطقه‌ی D کاملاً در داخل یک مربع قرار می‌گیرد، و این مربع حاوی تمام نقاط مرزی آن است. یک دایره یا یک چندضلعی (با خط شکسته‌ای که آن را محصور می‌کند)، یک بیضی، و امثال آن می‌توانند نمونه‌هایی از چنین مناطقی باشند. به علاوه، فرض می‌کنیم که توابع $\varphi(x,y)$ و $\psi(x,y)$ در منطقه‌ی D پیوسته هستند. توابع $\varphi(x,y)$ و $\psi(x,y)$ نگاشتی از منطقه‌ی D به منطقه‌ی دیگری در همان صفحه برقرار می‌کنند. برای پیدا کردن نقطه‌ای که نقطه‌ی $M_۰(x_۰,y_۰)$ از منطقه‌ی D به آن نگاشت می‌شود، باید مختصات آن به جایگزین x و y در $\varphi(x,y)$ و $\psi(x,y)$ کنیم. نتیجه‌ی این جایگزینی، مختصات تصویر نقطه‌ی $M_۰$ خواهد بود. مثلاً اگر

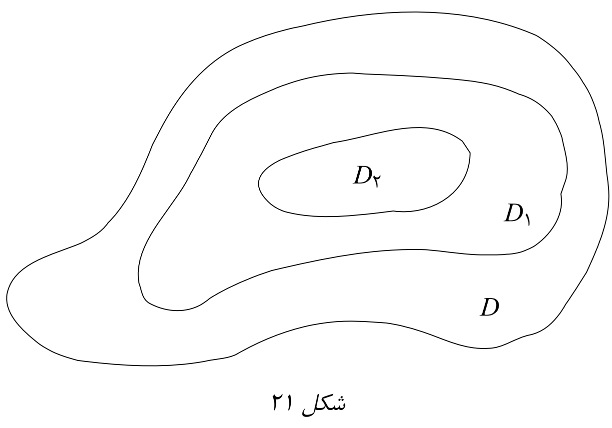
$$\varphi(x,y) = x^۲ + y^۲,$$

$$\psi(x,y) = ۲xy,$$

آنگاه نقطه‌ی $M_۰(۱,۳)$ به نقطه‌ی $N_۰(۱۰,۶)$ نگاشت خواهد شد.

در آینده نگاشت داده شده با توابع $\varphi(x,y)$ و $\psi(x,y)$ را با یک حرف Φ نشان خواهیم داد و تصویر نقطه‌ی M تحت نگاشت Φ را با $\Phi(M)$ نشان خواهیم داد.

فرض کنید که نگاشت Φ منطقه‌ی D را به زیرمنطقه‌ی $D_۱ = \Phi(D)$ نگاشت می‌کند. آنگاه همان نگاشت را می‌توان بر $D_۱$ اعمال کرد، تا منطقه‌ی $D_۱$ را به زیرمنطقه‌ی $D_۲ = \Phi(D_۱)$ تبدیل کند، که البته در داخل منطقه‌ی D قرار دارد. با ادامه‌ی این فرآیند، دستگاهی از منطقه‌های $D, D_۱, \ldots, D_n, \ldots$ به دست می‌آید (شکل ۲۱)، که داخل یکدیگر قرار گرفته‌اند.



شکل ۲۱

نگاشت Φ را یک *انقباض* می‌گویند، اگر یک عدد q، $۰ < q < ۱$، وجود داشته باشد، به گونه‌ای که برای هر دو نقطه‌ی $M_۱$ و $M_۲$ در داخل D، نابرابری

$$r(\Phi(M_۱), \Phi(M_۲)) \leq qr(M_۱, M_۲)$$

برقرار باشد. در اینجا $r(M, N)$ نشان دهنده‌ی فاصله‌ی بین نقاط M و N است.

همانند حالت یک متغیر واحد، گزاره‌ی زیر را می‌توان ثابت کرد:

فرض کنید نگاشت Φ منطقه‌ی D را به یک زیرمنطقه نگاشت می‌کند، و یک انقباض است. آنگاه یک نقطه‌ی یکتای N در منطقه‌ی D وجود خواهد داشت به گونه‌ای که $N = \Phi(N)$. این نقطه به همه‌ی مناطق D_n تعلق دارد. مختصات ξ, η نقطه‌ی N در دستگاه معادلات (۹۷) صدق می‌کنند، یعنی

$$\xi = \varphi(\xi, \eta)$$

$$\eta = \psi(\xi, \eta)$$

همانند حالت یک‌متغیری، مقادیر ξ و η به طور تقریبی با روش تکرار محاسبه می‌شوند. اگر $M_\circ(x_\circ, y_\circ)$ یک نقطه‌ی دلخواه منطقه‌ی D و $M_{n+۱} = \Phi(M_n)$ [یعنی $x_{n+۱} = \varphi(x_n, y_n), y_{n+۱} = \psi(x_n, y_n)$]، آنگاه دنباله‌ی نقاط $M_\circ, M_۱, \ldots, M_n, \ldots$ به نقطه‌ی ثابت N از نگاشت همگرا می‌شود.

۲۵ تغییر تعریف فاصله

این که Φ یک نگاشت انقباضی باشد، شرط کافی برای همگرایی فرآیند تکرار است. ولی این شرط لازم نیست. نگاشت Φ ممکن است یک انقباض نباشد، ولی با این وجود، فرآیند تکرار ممکن است همگرا شود. برای نمونه، نگاشت Φ که به وسیله‌ی توابع $\varphi(x,y) = ۱ + ۲y, \psi(x,y) = ۳ + \frac{x}{۸}$ تعریف شده است، یک انقباض نیست. اگر $A(۸, ۰)$ و $B(۸, ۴)$ را در نظر بگیریم، داریم

$$r(A, B) = ۴, \quad \Phi(A) = (۱, ۴), \quad \Phi(B) = (۹, ۴),$$

و

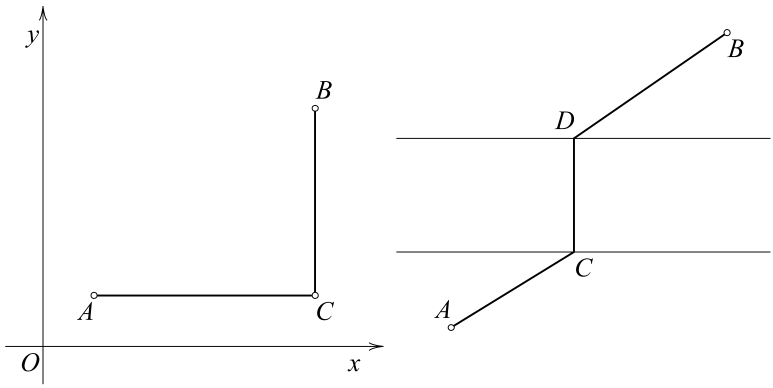
$$r(\Phi(A), \Phi(B)) = ۸ > r(A, B).$$

با این حال، صرف نظر از اینکه چه نقطه‌ای را به عنوان $M_۰$ انتخاب کنیم، مجموعه‌ی نقاط $M_۰, M_۱, \ldots, M_n, \ldots$ به نقطه‌ی

$$N\left(۹\frac{۱}{۳}, ۴\frac{۱}{۶}\right)$$

همگرا می‌شود.

در برخی از موارد، اگر تعریف فاصله‌ی بین نقاط در یک صفحه را تغییر دهیم، می‌توانیم همگرایی فرآیند تکرار را تعیین کنیم. در حقیقت، تعاریف مختلفی برای فاصله‌ی بین دو نقطه می‌تواند وجود داشته باشد. مثلاً یک مسافر به طور طبیعی ممکن است فاصله را بر اساس زمانی که طول می‌کشد که از نقطه‌ی A به نقطه‌ی B برود، اندازه‌گیری کند. در وضعیت نشان داده شده در شکل ۲۲a، فاصله‌ی بین نقطه‌های A و B برابر با مجموع طول قطعات AC، CD، و DB خواهد بود (برای رفتن از نقطه‌ی A به نقطه‌ی B، فرد باید به پل CD برود، از آن عبور کند، و بعد از نقطه‌ی D به نقطه‌ی B برود). اگر حرکت در صفحه فقط در امتداد دو راستای متعامد امکان‌پذیر باشد، همانند شکل ۲۲b، در آن صورت فاصله‌ی بین نقاط A و B را باید به عنوان مجموع پاره‌خط‌های AC و CB تعریف کرد. تعریف‌های دیگری نیز برای «فاصله»ی بین نقاط صفحه می‌توان ارائه کرد. (برای اطلاعات مفصل‌تر در باره‌ی تعریف‌های مختلف فاصله، می‌توانید به کتاب «فاصله چیست» نوشته‌ی یو. آ. شریدر مراجعه کنید.)



(b) (a)

شکل ۲۲

معمولاً لازم است که فاصله‌ی بین نقاط $r(A,B)$ دارای خاصیت‌های زیر باشد:

۱. فاصله‌ی $r(A,B)$ بین هر دو نقطه‌ی A و B *نامنفی* است، و فقط وقتی که نقطه‌های A و B بر هم منطبق باشند، صفر است.

۲. برای هر دو نقطه‌ی A و B، شرط *تقارن* برقرار است:

$$r(A,B) = r(B,A).$$

۳. برای هر سه نقطه‌ی A، B، و C، *نابرابری مثلثی* برقرار است:

$$r(A,B) \leq r(A,C) + r(C,B).$$

اگر برای مجموعه‌ای از اشیا یک فاصله تعریف شود که دارای این خاصیت‌ها باشد، به آن مجموعه یک *فضای متریک* می‌گویند، و به اعضای مجموعه، نقاط این فضا می‌گویند. نقاط یک فضای متریک حتی می‌توانند تابع باشند. برای توابع پیوسته‌ی $\varphi(x)$ و $\psi(x)$ روی بازه‌ی $[a,b]$، فاصله را می‌توان به صورت مقدار بیشینه‌ی تابع $|\varphi(x) - \psi(x)|$ روی این بازه تعریف کرد.

$$r(\varphi,\psi) = \max_{a\leq x\leq b} |\varphi(x) - \psi(x)|.$$

ما قبلاً دیده‌ایم که برای تبدیل کردن یک صفحه به یک فضای متریک، روش‌های مختلفی وجود دارد: در تمام روش‌های فوق برای تعریف فاصله، شروط (۱) تا (۳) تأمین می‌شوند.

یک مثال جالب ذکر می‌کنیم از وضعیتی که در آن شرط‌های (۱) و (۲) تأمین شده است، ولی شرط تقارن (۲) برقرار نیست. فرض کنید فاصله‌ی بین نقطه‌های A و B در یک *منطقه‌ی کوهستانی* بر اساس زمانی که طول می‌کشد که از نقطه‌ی A به نقطه‌ی B برویم، اندازه‌گیری شود. چون مدت صعود و مدت پایین آمدن یکسان نیست، لذا $r(A,B) \neq r(B,A)$.

باید دانست که شرط زیر برای همگرا شدن فرآیند تقریبات متوالی در حل دستگاه معادلات

$$\begin{cases} x = \varphi(x,y) \\ y = \psi(x,y) \end{cases} \tag{۹۹}$$

کافی است:

نگاشت Φ که با توابع $\varphi(x,y)$ و $\psi(x,y)$ تعریف شده است، منطقه‌ی D را به توی خودش نگاشت می‌کند و لااقل برای یک «فاصله‌ی» $r(A,B)$ یک انقباض است. به عبارت دیگر، باید یک عدد q با $۰ < q < ۱$ وجود داشته باشد، به گونه‌ای که برای هر دو نقطه‌ی $M_۱$ و $M_۲$ از D، نامعادله‌ی

$$r(\Phi(M_۱), \Phi(M_۲)) \le qr(M_۱, M_۲)$$

برقرار باشد.

برای نمونه، توابع $\varphi(x,y) = ۱ + ۲y$ و $\psi(x,y) = ۳ + \frac{x}{۸}$ را در نظر بگیرید. می‌توان دید که نگاشت Φ تعریف شده با اینها یک انقباض با ضریب $۱/۲$ است، اگر فاصله‌ی بین نقاط $A(x_۱, y_۱)$ و $B(x_۲, y_۲)$ با فرمول زیر تعریف شود:

$$r(A,B) = \left|\frac{۱}{۲}(x_۲ - x_۱) + ۲(y_۲ - y_۱)\right| + \left|\frac{۱}{۲}(x_۲ - x_۱) - ۲(y_۲ - y_۱)\right|.$$

به عنوان مثال، برای نقطه‌های $A(۸, ۰)$ و $B(۸, ۴)$ داریم $r(A,B) = ۱۶$، در حالی که برای تصاویر آنها $\Phi(A)$ و $\Phi(B)$ داریم:

$$r(\Phi(A), \Phi(B)) = ۸.$$

در نتیجه‌ی این نگاشت، فاصله دو برابر کمتر می‌شود. بدین خاطر است که فرآیند تکرار در حل دستگاه معادلات

$$\begin{cases} x = ۱ + ۲y \\ y = ۳ + \dfrac{x}{۸} \end{cases}$$

همگرا می‌شود، ولو آنکه نگاشت Φ نسبت به فاصله‌ی معمولی یک انقباض نیست (رک. ابتدای این فصل).

۲۶ آزمون همگرایی فرآیند تقریبات متوالی برای دستگاه‌های معادلات خطی

اجازه دهید آزمون همگرایی را که در بالا ابداع شد، برای دستگاه‌های معادلات خطی به کار بگیریم. با انتخاب انواع مختلف فاصله، آزمون‌های همگرایی برای این دستگاه‌ها را به صورتی به دست می‌آوریم که بر حسب خواص ضرایب آنها بیان شده باشد.

در آغاز یک دستگاه دومعادله‌ای خطی با دو مجهول را در نظر بگیرید:

$$\begin{cases} a_{۱۱}x + a_{۱۲}y = b_۱ \\ a_{۲۱}x + a_{۲۲}y = b_۲ \end{cases} \tag{۱۰۰}$$

فرض کنید $a_{۱۱} \neq ۰$ و $a_{۲۲} \neq ۰$. معادله‌ی اول را برای x و معادله‌ی دوم را برای y حل کنید. یک دستگاه معادلات به دست می‌آید:

$$\begin{cases} x = \dfrac{b_۱}{a_{۱۱}} - \dfrac{a_{۱۲}}{a_{۱۱}}y \\[2ex] y = \dfrac{b_۲}{a_{۲۲}} - \dfrac{a_{۲۱}}{a_{۲۲}}x \end{cases}$$

برای اختصار، قرار می‌دهیم $\frac{b_۱}{a_{۱۱}} = \beta_۱$، $-\frac{a_{۱۲}}{a_{۱۱}} = \alpha_۱$، $\frac{b_۲}{a_{۲۲}} = \beta_۲$، و $-\frac{a_{۲۱}}{a_{۲۲}} = \alpha_۲$.

آنگاه دستگاه معادلات به شکل زیر در می‌آید:

$$\begin{cases} x = \alpha_۱ y + \beta_۱ \\ y = \alpha_۲ x + \beta_۲ \end{cases} \tag{۱۰۰'}$$

در اینجا، توابع تعریف کننده‌ی نگاشت Φ به صورت زیر هستند:

$$\varphi(x,y) = \alpha_۱ y + \beta_۱, \quad \psi(x,y) = \alpha_۲ x + \beta_۲.$$

ببینیم که ضرایب $\alpha_۱$ و $\alpha_۲$ چه باید باشند تا این نگاشت یک انقباض باشد.

به طوری که می‌دانیم، فاصله‌ی $r(A,B)$ بین نقاط $A(x_۱, y_۱)$ و $B(x_۲, y_۲)$ با فرمول

$$r(A,B) = \sqrt{(x_۲ - x_۱)^۲ + (y_۲ - y_۱)^۲}$$

بیان می‌شود.
نگاشت Φ نقطه‌ی A را به نقطه‌ی $A_1\left(\alpha_1 y_1+\beta_1, \alpha_2 x_1+\beta_2\right)$ و نقطه‌ی B را به نقطه‌ی $B_1\left(\alpha_1 y_2+\beta_1, \alpha_2 x_2+\beta_2\right)$ نگاشت می‌کند. فاصله‌ی بین این دو نقطه از فرمول زیر به دست می‌آید:

$$\begin{aligned} r(A_1, B_1) &= \sqrt{\left(\alpha_1 y_2-\alpha_1 y_1\right)^2+\left(\alpha_2 x_2-\alpha_2 x_1\right)^2} \\ &= \sqrt{\alpha_1^2\left(y_2-y_1\right)^2+\alpha_2^2\left(x_2-x_1\right)^2}. \end{aligned} \tag{۱۰۱}$$

از میان $|\alpha_1|$ و $|\alpha_2|$، عدد بزرگ‌تر را با q نشان می‌دهیم:

$$q=\max\left(|\alpha_1|,|\alpha_2|\right).$$

آنگاه، نامعادله‌ی

$$r(A_1, B_1) \leq q\sqrt{\left(x_2=x_1\right)^2+\left(y_2-y_1\right)^2}=qr(A, B)$$

از فرمول (۱۰۱) نتیجه می‌شود.
نتیجتاً، اگر $q<1$، آنگاه نگاشت Φ روی تمام صفحه یک انقباض است. در آن حالت، به طوری که می‌دانیم، فرآیند تقریبات متوالی همگرا است.
به این ترتیب، ثابت کردیم که اگر

$$\max\left(|\alpha_1|,|\alpha_2|\right)<1, \tag{۱۰۲}$$

فرآیند تقریبات متوالی برای حل دستگاه معادلات (′۱۰۰) همیشه همگرا خواهد بود.
حال، آزمون همگرایی را که در بالا به دست آمد، مستقیماً بر حسب ضرایب دستگاه معادلات (۱۰۰) بیان می‌کنیم. برای این کار، به خاطر آورید که

$$\alpha_1=-\frac{a_{12}}{a_{11}},$$

$$\alpha_2=-\frac{a_{21}}{a_{22}}.$$

با جایگزین کردن این عبارت‌ها در شرط (۱۰۲)، به نتیجه‌گیری زیر می‌رسیم:
برای اینکه فرآیند تقریبات متوالی برای حل دستگاه معادلات خطی

$$\begin{cases} a_{11}x+a_{12}y=b_1 \\ a_{21}x+a_{22}y=b_2 \end{cases}$$

همگرا باشد، کافی است که شرط

$$\max\left(\left|\frac{a_{۱۲}}{a_{۱۱}}\right|, \left|\frac{a_{۲۱}}{a_{۲۲}}\right|\right) < ۱ \tag{۱۰۳}$$

تأمین شود.

این شرط بدان معنا است که ضرایب قطری باید بزرگ‌تر از ضرایب غیرقطری در سطر مربوطه باشد. به این خاطر، مثلاً هنگام حل دستگاه

$$\begin{cases} x - ۳y = -۱۱ \\ ۶x + y = ۱۰, \end{cases}$$

معادله‌ی اول را باید برای y و معادله‌ی دوم را برای x حل کرد:

$$y = \frac{۱۱}{۳} + \frac{۱}{۳}x, \quad x = \frac{۵}{۳} - \frac{y}{۶}.$$

گاه مفید است که ابتدا یک تبدیل مقدماتی از دستگاه معادلات انجام دهیم و مجهول‌های x و y را با مجهول‌های دیگری متناسب با آنها جایگزین کنیم. مثلاً دستگاه معادلات زیرا در نظر بگیرید:

$$\begin{cases} ۱۲x + y = ۱۴ \\ ۳x - ۲y = -۱. \end{cases} \tag{۱۰۴}$$

برای آن داریم:

$$\max\left(\left|\frac{a_{۱۲}}{a_{۱۱}}\right|, \left|\frac{a_{۲۱}}{a_{۲۲}}\right|\right) = \max\left(\frac{۱}{۱۲}, \frac{۳}{۲}\right) = \frac{۳}{۲},$$

و به این خاطر، شرط کافی همگرایی فرآیند تقریبات تأمین نمی‌شود. ولی اگر قرار دهیم $x = \frac{۱}{۳}z$، آنگاه دستگاه معادلات زیر را به دست می‌آوریم:

$$\begin{cases} ۴z + y = ۱۴ \\ z - ۲y = -۱, \end{cases} \tag{۱۰۵}$$

که برای آن داریم:

$$\max\left(\left|\frac{a_{۱۲}}{a_{۱۱}}\right|, \left|\frac{a_{۲۱}}{a_{۲۲}}\right|\right) = \max\left(\frac{۱}{۴}, \frac{۱}{۲}\right) = \frac{۱}{۲}.$$

این بدان معنا است که دستگاه معادلات (۱۰۴) را می‌توان با روش تقریبات متوالی حل کرد.

البته هیچکس تلاش نمی‌کند دستگاه‌های معادلات ساده‌ای مانند (۱۰۴) را به روش تقریبات متوالی حل کند. ولی برای دستگاه‌های معادلات با تعداد زیاد مجهول، این روش گاه بسیار مفید است. شروط کافی برای همگرایی حل دستگاه معادلات

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

تقریباً به همان روش دستگاه‌های معادلات دومجهولی تعیین می‌شود. در حقیقت، احکام زیر صحیح است:

فرآیند تقریبات متوالی برای دستگاه معادلات (۱۰۵) همگرا می‌شود، اگر شروط زیر تأمین شود:

$$1)\quad \max_i \sum_{j=1}^{n}{}' \left|\frac{a_{ij}}{a_{ii}}\right| < 1, \tag{۱۰۶}$$

$$2)\quad \max_j \sum_{i=1}^{n}{}' \left|\frac{a_{ij}}{a_{ii}}\right| < 1, \tag{۱۰۷}$$

$$3)\quad \max_k \sum_{i,j=1}^{n}{}^{(k)} \left|\frac{a_{ij}}{a_{ii}}\right|^2 < 1. \tag{۱۰۸}$$

پریم در مجموع‌های (۱۰۶) و (۱۰۷) بدان معنا است که جمله‌ای که برای آن $i = j$، باید کنار گذاشته شود. نماد (k) در (۱۰۸) بدان معنا است که جمله‌هایی که برای آنها $i = k$ و نیز جمله‌هایی که برای آنها $i = j$، باید کنار گذاشته شوند. دقت کنید که شرط (۳) باید تأمین شود اگر

$$\sum_{i,j=1}^{n}{}' \left|\frac{a_{ij}}{a_{ii}}\right|^2 < 1, \tag{۱۰۹}$$

که در اینجا پریم بدان معنا است که جمله‌ای که برای آن $i = j$، باید کنار گذاشته شود. در اکثر کتاب‌های ریاضیات محاسباتی، این شرط به صورت (۱۰۹) ارائه می‌شود.

به طوری که قبلاً گفته‌ایم، اگر لازم بدانیم که نگاشت

$$x_1 \to \frac{b_1}{a_{11}} \qquad -\frac{a_{12}}{a_{11}}x_2 - \cdots - \frac{a_{1n}}{a_{11}}x_n$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$x_n \to \frac{b_n}{a_{nn}} - \frac{a_{n1}}{a_{nn}}x_1 - \frac{a_{n2}}{a_{nn}}x_2 - \cdots - \frac{a_{n,n-1}}{a_{nn}}x_{n-1}$$

نسبت به یک فاصله، یک انقباض باشد، به شرط‌های (۱۰۸)-(۱۰۶) می‌رسیم. در واقع، شرط (۱۰۶) متناظر با فاصله‌ی بین نقطه‌های $A(x_1, \ldots, x_n)$ و $B(y_1, \ldots, y_n)$

$$r(A,B)=\max\left(|x_۱-y_۱|,\ldots,|x_n-y_n|\right)$$

است، شرط (۱۰۷) متناظر با فاصله‌ی $r(A,B)=\sum_{i=۱}^{n}|x_i-y_i|$ است، و شرط (۱۰۸) متناظر با فاصله‌ی $r(A,B)=\sqrt{\sum_{i=۱}^{n}\left(x_i-y_i\right)^۲}$ است.

همانند حالت دومتغیری ، گاه مفید است که به جای مجهول‌های $x_۱,\ldots,x_n$، مجهول‌های جدیدی متناسب با آنها جایگزین کنیم: $y_۱=p_۱x_۱,\ldots,y_n=p_nx_n$، که در اینجا $p_۱>۰,\ldots,p_n>۰$.

در این حالت، شرط‌های (۱۰۶)، (۱۰۷)، و (۱۰۸) به شکل زیر در می‌آیند:

$$(۱')\quad \max_i \sum_{j=۱}^{n}{}' \left|\frac{a_{ij}}{a_{ii}}\right|\frac{p_i}{p_j}<۱, \tag{۱۰۶'}$$

$$(۲')\quad \max_j \sum_{i=۱}^{n}{}' \left|\frac{a_{ij}}{a_{ii}}\right|\frac{p_i}{p_j}<۱, \tag{۱۰۷'}$$

$$(۳')\quad \max_k \sum_{i,j=۱}^{n}{}^{(k)} \left|\frac{a_{ij}}{a_{ii}}\right|^۲\frac{p_i^۲}{p_j^۲}<۱. \tag{۱۰۸'}$$

به طور خاص، وقتی که $p_i=|a_{ii}|$، این شرط‌ها به شکل زیر در می‌آیند:

$$(۱'')\quad \max_i \sum_{j=۱}^{n}{}' \left|\frac{a_{ij}}{a_{ii}}\right|<۱, \tag{۱۰۶''}$$

$$(۲'')\quad \max_j \sum_{i=۱}^{n}{}' \left|\frac{a_{ij}}{a_{ii}}\right|<۱, \tag{۱۰۷''}$$

$$(۳'')\quad \max_k \sum_{i,j=۱}^{n}{}^{(k)} \left|\frac{a_{ij}}{a_{ii}}\right|^۲<۱. \tag{۱۰۸''}$$

به عنوان مثال، دستگاه معادلات

$$\begin{cases} x-۰/۰۶y-۰/۵z=-۲/۶\\ -۰/۲x+y-۰/۴z=۳\\ -۰/۱x+۰/۵y+z=۳/۹\end{cases}$$

را در نظر بگیرید.

شرط‌های (۲)،(۱) و نیز $(۲'),(۱')$ برای این دستگاه تأمین نمی‌شوند. به همین ترتیب، نامعادله‌ی (۱۰۹) در این حالت برقرار نیست—مجموع مربع‌های عناصر غیرقطری برابر با ۱/۰۷ است. اما

$$\sum_{i,j=1}^{n} {}^{(k)} \left|\frac{a_{ij}}{a_{ii}}\right|^{2} = \max\left(0{,}6^2 + 0{,}5^2 + 0{,}2^2 + 0{,}4^2 ;\right.$$

$$\left. 0{,}6^2 + 0{,}5^2 + 0{,}1^2 + 0{,}5^2 ; 0{,}2^2 + 0{,}4^2 + 0{,}1^2 + 0{,}5^2 \right) = 0{,}87 < 1,$$

و بنا بر این، دستگاه را می‌توان با روش تقریبات متوالی حل کرد.

دقت کنید که تمام شروط ذکر شده در بالا برای همگرا شدن فرآیند تقریبات متوالی کافی هستند، ولی به هیچ وجه لازم نیستند. با انتخاب تعاریف متفاوت فاصله‌ی بین نقاط و نوشتن شرط انقباض، به شرط‌های جدید همگرایی می‌رسیم. با این حال، در اینجا قصد نداریم وارد این مسئله شویم.

توضیحات ذکر شده در بخش ۵ برای دستگاه‌های معادلات خطی نیز اعتبار دارد. مثلاً نتیجه‌ی تقریبات بستگی به انتخاب تقریب اولیه ندارد. بنا بر این، اگر در حین محاسبات خطایی صورت گیرد، محاسبات بعدی بی‌اعتبار نمی‌شود، بلکه فقط پیشرفت به سوی نتیجه‌ی نهایی را به تأخیر می‌اندازد.

برای حل دستگاه‌های معادلات خطی از شکل‌های مختلف روش تقریبات متوالی استفاده می‌شود. به این ترتیب، در برخی از روش‌ها، بعد از آنکه مقدار تقریبی $x_1^{(n+1)}$ به دست آمد، به همراه $x_3^{(n)}, x_4^{(n)}, \ldots, x_m^{(n)}$ برای یافتن $x_2^{(n+1)}$ جایگزین می‌شود؛ بعد $x_1^{(n+1)}, x_2^{(n+1)}, x_4^{(n)}, \ldots, x_m^{(n)}$ برای یافتن $x_3^{(n+1)}$ جایگزین می‌شود، و الی آخر. شرح همه‌ی روش‌های ممکن تقریبات که برای حل دستگاه‌های معادلات خطی استفاده می‌شود، خود می‌تواند موضوعی برای یک کتاب دیگر باشد.

۲۷ تقریبات متوالی در هندسه

ما کاربرد روش تقریبات متوالی را در حل معادلات و دستگاه‌های معادلات شرح دادیم. این روش برای برخی از مسایل هندسه نیز، از قبیل مسئله‌ی محاسبه‌ی طول پیرامون، به کار می‌رود. روش معمول برای محاسبه‌ی پیرامون آن است که ابتدا محیط مربع محاط را به دست می‌آورند، بعد محیط هشت‌ضلعی منتظم محاط را به دست می‌آورند، و بعد یک شانزده‌ضلعی منتظم محاط، و الی آخر. حد این محیط‌ها برابر با طول پیرامون است. در این فرآیند، هر محیط بعدی به کمک قبلی به دست می‌آید. این کار به روش زیر انجام می‌شود.

ضلع یک ۲^n-ضلعی منتظم را با A_n و محیط آن را با P_n نشان دهید. مثلاً $A_۲$ ضلع یک مربع است و بنا بر این، $A_۲ = R\sqrt{۲}, P_۲ = ۴R\sqrt{۲}$. فرض کنید قبلاً P_n را به دست آورده‌ایم. آنگاه بدیهی است که

$$A_n = \frac{P_n}{۲^n}\,.$$

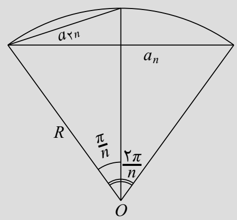
در هندسه، ثابت می‌شود که ضلع $a_{۲n}$ یک $۲n$-ضلعی منتظم محاط بر حسب ضلع a_n یک n-ضلعی منتظم محاط و شعاع R پیرامون از فرمول زیر* محاسبه می‌شود:

$$a_{۲n} = R\sqrt{۲ - \sqrt{۴ - \frac{a_n^۲}{R^۲}}}. \qquad (۱۱۰)$$

* این فرمول به آسانی با استفاده از مثلثات به دست می‌آید. روشن است که اگر a_n ضلع یک n-ضلعی منتظم محاط و $a_{۲n}$ ضلع یک $۲n$-ضلعی منتظم محاط باشد، آنگاه

$$a_n = ۲R\sin\frac{\pi}{n}, \quad a_{۲n} = ۲R\sin\frac{\pi}{۲n}$$

(نک. شکل). از آنجا که



$$\sin\frac{\alpha}{۲}=\sqrt{\frac{۱-\cos\alpha}{۲}},$$

لذا نتیجه می‌شود که

$$\begin{aligned} a_{۲n} &= ۲R\sin\frac{\pi}{۲n}=۲R\sqrt{\frac{۱-\cos\frac{\pi}{n}}{۲}}= \\ &= R\sqrt{۲-۲\sqrt{۱-\sin^{۲}\frac{\pi}{n}}}=R\sqrt{۲-\sqrt{۴-\frac{a_n^{۲}}{R^{۲}}}}. \end{aligned}$$

در نتیجه، ضلع $A_{n+۱}$ یک $۲^{n+۱}$-ضلعی محاط بر حسب ضلع A_n یک ۲^n-ضلعی محاط با استفاده از فرمول زیر بیان می‌شود:

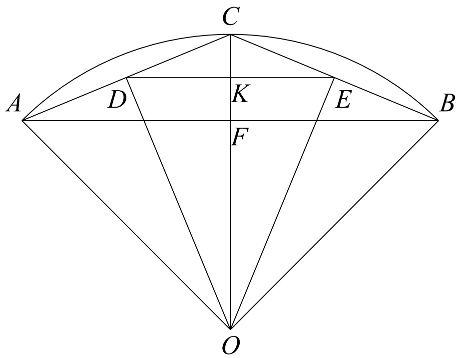
$$A_{n+۱}=R\sqrt{۲-\sqrt{۴-\frac{A_n^{۲}}{R^{۲}}}}.$$

از آنجا که $A_n=\frac{P_n}{۲^n}$ و $A_{n+۱}=\frac{P_{n+۱}}{۲^{n+۱}}$، نتیجه می‌شود که

$$P_{n+۱}=۲^{n+۱}R\sqrt{۲-\sqrt{۴-\frac{P_n^{۲}}{۲^{۲n}R^{۲}}}}. \qquad (۱۱۰')$$

دنباله‌ی اعداد $P_۲, P_۳, \ldots, P_n, \ldots$ به سمت طول پیرامون، یعنی مقدار $۲\pi R$ میل می‌کند. بنا بر این، فرمول (۱۱۰) را می‌توان فرمول محاسبه‌ی $۲\pi R$ به کمک روش تقریبات تلقی کرد. با استفاده از این روش، می‌توان مقدار π را تا هر تعداد رقم اعشاری به دست آورد.

روش دیگری نیز برای محاسبه‌ی تقریبی مقدار π وجود دارد که به آن *روش پیرامون‌های مساوی* می‌گویند. در این روش، یک ۲^n-ضلعی منتظم با یک $۲^{n+۱}$-ضلعی منتظم که دارای پیرامون مساوی با آن است، جایگزین می‌شود. ارتفاع ۲^n-ضلعی منتظم را با l_n و شعاع دایره‌ی احاطه کننده‌ی آن را با r_n نشان می‌دهیم. همچنین، ارتفاع $۲^{n+۱}$-ضلعی منتظم را با $l_{n+۱}$ و شعاع دایره‌ی احاطه کننده‌ی آن را با $r_{n+۱}$ نشان می‌دهیم.



شکل ۲۳

فرض کنید AB (شکل ۲۳) ضلع ۲^n-ضلعی محاط شده در دایره‌ای به شعاع r_n باشد. نقطه‌ی وسط C از کمان AB را به نقاط A و B وصل کنید و خط DE را که در آن نقاط D و E به ترتیب نقاط وسط اضلاع AC و BC از مثلث ACB هستند، ترسیم کنید. روشن است که زاویه‌ی DOE برابر با نصف زاویه‌ی AOB خواهد بود. بنا بر این، DE یک ضلع از $۲^{n+۱}$-ضلعی منتظم محاط شده در داخل دایره‌ای به شعاع OD خواهد بود. از آنجا که $DE = \frac{۱}{۲} AB$، لذا محیط $۲^{n+۱}$-ضلعی برابر با محیط ۲^n-ضلعی است. این بدان معنا است که $r_{n+۱} = OD, l_{n+۱} = OK$.
به آسانی می‌توان محاسبه کرد که

$$l_{n+۱} = OK = \frac{r_n + l_n}{۲}. \qquad (۱۱۱)$$

آنگاه از مثلث قائم‌الزاویه‌ی ODC می‌بینیم که

$$r_{n+۱} = \sqrt{r_n l_{n+۱}}. \qquad (۱۱۲)$$

فرمول‌های (۱۱۱) و (۱۱۲)، $r_{n+۱}$ و $l_{n+۱}$ را بر حسب r_n و l_n بیان می‌کنند.
محیط‌های چندضلعی‌ها با افزایش n تغییر نمی‌کند، و اعداد r_n و l_n به حد یکسانی میل می‌کنند. این حد برابر با شعاع دایره‌ای است که طول محیط آن برابر با محیط چندضلعی‌ها است. اگر چندضلعی اولیه به گونه‌ای انتخاب کنیم که محیط آن برابر با ۲ باشد، آنگاه r_n و l_n هر دو به سمت عدد $\frac{۱}{\pi}$ میل خواهند کرد:

$$\underset{n\to\infty}{\text{حد}} r_n = \frac{۱}{\pi}, \quad \underset{n\to\infty}{\text{حد}} l_n = \frac{۱}{\pi}.$$

برای نمونه، اگر به عنوان چندضلعی اول، یک مربع با ضلع ۱/۲ انتخاب کنیم، داریم $r_۲ = \frac{\sqrt{۲}}{۴}, l_۲ = \frac{۱}{۴}$. بنا بر این، مطلب زیر درست است: اگر قرار دهیم $r_۲ = \frac{\sqrt{۲}}{۴}, l_۲ = \frac{۱}{۴}$ و مقادیر

$r_{n+۱}, l_{n+۱}, n = ۲, ۳, \ldots$ را با استفاده از فرمول‌های (۱۱۱) و (۱۱۲) محاسبه کنیم، خواهیم داشت:

$$\lim_{n\to\infty} r_n = \lim_{n\to\infty} l_n = \frac{۱}{\pi}.$$

از این فرمول‌ها می‌توان برای به دست آوردن مقادیر تقریبی $\frac{۱}{\pi}$ استفاده کرد. برای این منظور، باید محاسبات را تا زمانی ادامه داد که مقادیر r_n و l_n در محدوده‌ی دقت مورد نظر بر یکدیگر منطبق شود. این مقدار مشترک r_n و l_n مقدار $\frac{۱}{\pi}$ در محدوده‌ی دقت مورد نظر خواهد بود.

۲۸ نتیجه‌گیری

این کتاب ما را با کاربردهای روش تقریبات متوالی برای مسایل مختلف—شامل برنامه‌ریزی، استخراج ریشه، حل معادلات، محاسبه‌ی طول محیط، آشنا ساخت. البته این لیست به هیچ وجه تمام کاربردهای این روش را در بر نمی‌گیرد. تعداد زیادی از مسایل منجر به معادلات دیفرانسیل (که حاوی مشتق توابع مجهول هستند)، معادلات انتگرالی، و انواع پیچیده‌تر معادلات می‌شوند. یکی از قوی‌ترین روش‌ها برای حل تقریبی این معادلات، روش تقریبات متوالی است. البته کاربرد آن در اینگونه موارد بسیار پیچیده‌تر از کاربرد آن در معادلات جبری است. ولی می‌توان گفت که اگر به خاطر روش تقریبات متوالی نبود، هیچکدام از مسایل عظیم فیزیکی و فنی که امروزه با آنها سر و کار داریم، قابل حل نبودند. مثلاً از این روش برای محاسبه‌ی حرکت یک ماهواره، طراحی رآکتور اتمی، و پژوهش‌های مربوط به ساختار اتم استفاده می‌شود. اما بحث در مورد کاربردهای روش تقریبات متوالی در خارج از حیطه‌ی حساب مقدماتی، فراتر از محدوده‌ی این کتاب است.

تمرینات

برای اینکه خواننده بتواند یادگیری خود را در زمینه‌ی روش‌های حل تقریبی معادلات که در این کتاب مورد بحث قرار گرفت، بیازماید، در اینجا چندین مثال از حل تقریبی معادلات ارائه می‌کنیم.

معادلات زیر را با استفاده از روش تکرار حل کنید:*

* در برخی از مثال‌ها، خواننده ابتدا باید معادله را به شکل $x = \varphi(x)$ تبدیل کند.

۱) $x = \frac{۱}{(x+۱)^{۲}}$

۲) $x = (x+۱)^{۳}$

۳) $x = ۴ + \sqrt[۳]{\frac{x-۱}{x+۱}}$

۴) $x = ۲ \pm \sqrt[۴]{x}$

۵) $x = \sqrt[۴]{۵-x}$

۶) $۴ - x = \tan x$

۷) $x^{۲} = \sin x$

۸) $x^{۳} = \sin x$

۹) $x = \arcsin \frac{x+۱}{۴}$

۱۰) $x = \cos x$

۱۱) $x = \frac{۱}{\cos x}$

۱۲) $x = ۱ + \frac{۱}{۱۰} \cos x$

۱۳) $x = \pm \sqrt{\log (x+۲)}$

۱۴) $x^{۲} = \ln (x+۱)$

۱۵) $\ln x = ۴ - x^{۲}$

۱۶) $\ln x = ۲ - x$

۱۷) $x^{۲} = e^{x} + ۲$

۱۸) $\log x = ۰/۱x$

۱۹) $\tan x = \log x$

۲۰) $x = ۱۲۰ e^{-x}$

معادلات زیر را با استفاده از روش نیوتن حل کنید:

۲۱) $x^{۳} - ۵x + ۱ = ۰$

۲۲) $x^{۳} - ۹x^{۲} + ۲۰x - ۱۱ = ۰$

۲۳) $x^{۳} - ۳x^{۲} - ۳x + ۱۱ = ۰$

۲۴) $x^{۲} + ۵x + ۱ = ۰$

۲۵) $\sin x + x = ۱$

۲۶) $x^{۲} - ۱۰ \log x - ۳ = ۰$

۲۷) دستگاه‌های معادلات زیر را با استفاده از روش تقریبات متوالی با دقت ۰/۰۰۱ حل کنید:

$$\text{a)}\quad \begin{cases} x = ۰/۲y - ۰/۱z + ۰/۸۹۸ \\ y = ۰/۳x + ۰/۱۵z + ۱/۳۸۳ \\ z = ۰/۲۵x - ۰/۴y + ۳/۶۷۷ \end{cases}$$

$$\text{b)}\quad \begin{cases} x = \frac{۱}{۴}\sin(x+y) + ۰/۳۳۶ \\ \\ y = -\frac{۱}{۴}\sin(x-y) + ۰/۳۶۲ \end{cases}$$

$$\text{c)}\quad \begin{cases} x = \sqrt{x+۲y} - ۰/۷۱۰ \\ y = \sqrt{y-x} + ۱ \end{cases}$$

حل تمرینات

۱ قرار دهید $\varphi(x)=\frac{۱}{(x+۱)^۲}$. آنگاه $\varphi'(x)=\frac{-۲}{(x+۱)^۳}$. داریم $\varphi(۰)=۱>۰$ و $\varphi(۱)=\frac{۱}{۴}<۱$. بنا بر این، بازه‌ی $[۰,۱]$ حاوی یک ریشه‌ی معادله است. اما نمی‌توانیم روش تقریبات متوالی را روی این بازه اعمال کنیم، چون $|\varphi'(۰)|=۲>۱$. برای باریک‌تر کردن بازه، دقت کنید که $\varphi(۰/۴)=\frac{۱}{۱/۹۶}>۰/۴$، و بنا بر این، ریشه‌ی معادله در بازه‌ی $[۰/۴,۱]$ قرار دارد. اگر $۰/۴\le x\le ۱$، آنگاه $|\varphi'(x)|\le\frac{۲}{۱/۴^۳}<۱$ و بنا بر این، می‌توان از روش تقریبات متوالی استفاده کرد. با قرار دادن $x_۱=۰/۴$، پس از ۱۱ مرحله‌ی تقریب داریم: $x_{۱۱}\approx\varphi(x_{۱۱})\approx ۰/۴۶۵۵$.

بنا بر این، با دقت ۰/۰۰۰۱ داریم: $x=۰/۴۶۵۵$.

۲ قرار دهید $\varphi(x)=(x+۱)^۳$. آنگاه $\varphi'(x)=۳(x+۱)^۲$، و داریم $\varphi(-۲)=-۱>-۲,\varphi(-۳)=-۸<-۳$. بنا بر این، بازه‌ی $[-۳,-۲]$ حاوی ریشه‌ی این معادله است. اما نمی‌توانیم روش تقریبات متوالی را برای بازه‌ی $[-۳,-۲]$ اعمال کنیم، $|\varphi'(x)|>۱$. معادله را به شکل

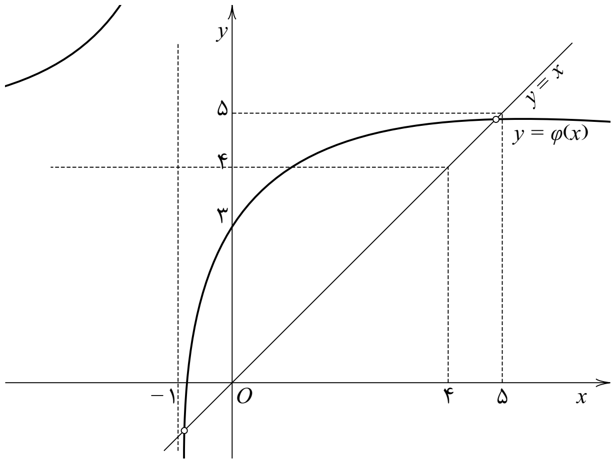
$$x=\sqrt[۳]{x}-۱$$

بازنویسی کنید. آنگاه داریم $\varphi(x)=\sqrt[۳]{x}-۱$ و $\varphi'(x)=\frac{۱}{۳\sqrt[۳]{x^۲}}$. در بازه‌ی $[-۳,-۲]$، داریم $|\varphi'(x)|\le\frac{۱}{۳\sqrt[۳]{x}}<۱$، و بنا بر این، می‌توانیم از روش تقریبات متوالی استفاده کنیم. با قرار دادن $x_۱=-۲$، داریم $x_۶\approx\varphi(x_۶)\approx -۲/۳۲۵$. بنا بر این، با دقت ۰/۰۰۱ داریم $x=-۲/۳۲۵$.

۳ قرار دهید $\varphi(x)=۴+\sqrt[۳]{\frac{x-۱}{x+۱}}$. داریم:

$$\varphi'(x)=\frac{۲}{۳\sqrt[۳]{(x-۱)^۲(x+۱)^۴}}.$$

شکل ۲۴ نشان می‌دهد که خط راست $y=x$، منحنی $y=۴+\sqrt[۳]{\frac{x-۱}{x+۱}}$ را در دو نقطه و به ترتیب در بازه‌ی $[-۱,۰]$ و $[۴,۵]$ واقع شده‌اند، قطع می‌کند. روی بازه‌ی $[۴,۵]$، داریم $|\varphi'(x)|\le\frac{۲}{۱۵\sqrt[۳]{۴۵}}<۱$. با قرار دادن $x_۱=۴$، داریم $x_۳\approx\varphi(x_۳)\approx ۴/۸۷۰$. بنا بر این، با دقت ۰/۰۰۱ داریم $x=۴/۸۷۰$.

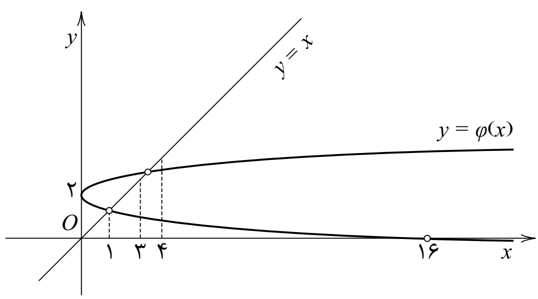


شکل ۲۴

روی بازه‌ی $[-۱,۰]$، روش تقریبات متوالی را نمی‌توان به طور مستقیم به کار گرفت. معادله را در این قسمت به شکل $\frac{x-۱}{x+۱}=(x-۴)^۳$ بازنویسی کنید، که از اینجا $x+۱=\frac{x-۱}{(x-۴)^۳}$ و $x=\frac{x-۱}{(x-۴)^۳}-۱$. در اینجا $\varphi(x)=\frac{x-۱}{(x-۴)^۳}-۱$ و $\varphi'(x)=\frac{-۲x-۱}{(x-۴)^۴}$. روشن است که برای $-۱\le x\le ۰$ داریم $|\varphi'(x)|\le\frac{۱}{۲۵۶}<۱$، و اکنون می‌توانیم از روش تقریبات متوالی استفاده کنیم. با قرار دادن $x_۱=۰$، داریم $x_۲\approx\varphi(x_۲)\approx -۰٫۹۸۴۰$.
یعنی با دقت ۰٫۰۰۰۱ داریم $x=-۰٫۹۸۴۰$.
به این ترتیب، دو ریشه پیدا کردیم: $x=۴٫۸۷۰, x=-۰٫۹۸۴۰$.

۴ در اینجا $\varphi_۱(x)=۲+\sqrt[۴]{x}$ و $\varphi_۲(x)=۲-\sqrt[۴]{x}$. از شکل ۲۵ می‌توان دید که معادله‌ی $x=۲+\sqrt[۴]{x}$ ریشه‌ای در بازه‌ی $[۳,۴]$ دارد. در این بازه،

$$|\varphi'(x)|=\frac{۱}{۴\sqrt[۴]{x^۳}}<۱.$$



شکل ۲۵

روش تقریبات متوالی را به کار بگیرید. با قرار دادن $x_۱=۴$ داریم $x_۴\approx\varphi(x_۴)\approx ۳٫۳۵۳$. لذا با دقت ۰٫۰۰۱

داریم $x = ۳/۳۵۳$.

حالا معادله‌ی $x = ۲ - \sqrt[۴]{x}$ را حل می‌کنیم. ریشه‌ی آن عبارت است از $x = ۱$. لذا ریشه‌های معادله ۱ و ۳/۳۵۳ هستند.

۵ در اینجا، $\varphi(x) = \sqrt[۳]{۵ - x}$ و $\varphi'(x) = \frac{-۱}{۳\sqrt[۳]{(۵-x)^۲}}$. داریم $\varphi(۱) = \sqrt[۳]{۴} < ۲$ و $\varphi(۲) = \sqrt[۳]{۳} > ۱$.

بنا بر این، یک ریشه‌ی معادله روی بازه‌ی $[۱,۲]$ وجود دارد. در این بازه، $\varphi'(x) \leq \frac{۱}{۳\sqrt[۳]{۹}} < ۱$. با قرار دادن $x_۱ = ۱$، داریم $x_۵ \approx \varphi(x_۵) \approx ۱/۵۱۶$. بنا بر این، با دقت ۰/۰۰۱ داریم $x = ۱/۵۱۶$.

۶ معادله را به صورت

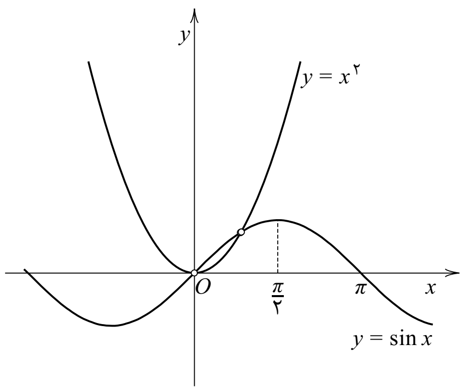
$$x = \arctan(۴ - x)$$

بنویسید. در اینجا $\varphi(x) = \arctan(۴ - x)$. داریم $\varphi(۱) = \arctan ۳ \approx ۱/۲۵$، و $\varphi(۲) = \arctan ۲ \approx ۱/۱۰$.
از اینجا نتیجه می‌شود که معادله ریشه‌ای واقع در بازه‌ی $[۱,۲]$ دارد. در این بازه، داریم:

$$\left|\varphi'(x)\right| = \frac{۱}{۱ + (۴ - x)^۲} \leq ۱۵.$$

بنا بر این، روش تقریبات متوالی قابل اعمال است. با قرار دادن $x_۱ = ۱$، داریم $x_۴ \approx \varphi(x_۴) \approx ۱/۲۲۵$. بنا بر این، با دقت ۰/۰۰۱ داریم $x = ۱/۲۲۵$.

۷



شکل ۲۶

معادله‌ی داده شده یک ریشه $x = ۰$ دارد. از شکل ۲۶ می‌توان دید که ریشه‌ی دوم مثبت است. بنا بر این، در معادله‌ی $x = \sqrt{\sin x}$ صدق می‌کند. در اینجا، $\varphi(x) = \sqrt{\sin x}$ و $\varphi'(x) = \frac{\cos x}{۲\sqrt{\sin x}}$. از آنجا که

$$\varphi\left(\frac{۱}{۲}\right) = \sqrt{\sin \frac{۱}{۲}} \approx \sqrt{۰/۴۷۹۴} > \frac{۱}{۲},$$

و

$$\varphi(۱) = \sqrt{\sin ۱} \approx \sqrt{۰/۸۴۱۴} < ۱,$$

نتیجه می‌شود که معادله ریشه‌ای در بازه‌ی $\left[\frac{۱}{۲}, ۱\right]$ دارد. در این بازه داریم:

$$\left|\varphi'(x)\right| \le \frac{\cos\frac{۱}{۲}}{۲\sqrt{\sin\frac{۱}{۲}}} \approx \frac{۰/۸۷۰۳}{۱/۳۸۴۶} < ۱,$$

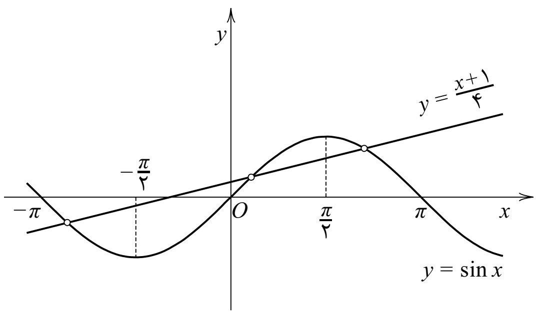
و بنا بر این، روش تقریبات متوالی همگرا می‌شود. با قرار دادن $x_۱ = ۱$، به دست می‌آوریم $x_۷ \approx \varphi(x_۷) \approx ۰/۸۷۶۸$. بنا بر این، با دقت ۰/۰۰۰۱، ریشه‌ی دوم معادله $x = ۰/۸۷۶۸$ است.

۸ این معادله به همان روش معادله‌ی قبلی حل می‌شود. با بازنویسی معادله به شکل

$$x = \sin x$$

و قرار دادن $x_۱ = ۱$، به دست می‌آوریم $x_۶ \approx \varphi(x_۶) \approx ۰/۹۲۸۶$. بنا بر این، با دقت ۰/۰۰۰۱، یک ریشه‌ی معادله $x = ۰/۹۲۸۶$ است. از آنجا که هر دو طرف معادله، توابع فرد هستند، یک ریشه‌ی دیگر نیز برابر با $x = -۰/۹۲۸۶$ وجود دارد. ریشه‌ی سوم معادله $x = ۰$ است.

۹ معادله را به صورت $\sin x = \frac{x+۱}{۴}$، $-\pi/۲ \le x \le \pi/۲$ می‌توان نوشت. از شکل ۲۷ مشخص است که یک ریشه‌ی منفرد آن بین ۰ و $\pi/۲$ قرار دارد.



شکل ۲۷

در اینجا،

$$\varphi(x) = \arcsin\frac{x+۱}{۴}\,; \quad \varphi'(x) = \frac{۱}{\sqrt{۱۶-(x+۱)^۲}}\,.$$

روی بازه‌ی $[۰,\pi/۲]$، داریم $\left|\varphi'(x)\right| < \frac{۱}{\sqrt{۳}} < ۱$. با قرار دادن $x_۱ = ۰$، به دست می‌آوریم $x_۸ \approx \varphi(x_۸) \approx ۰/۳۴۲۲$، و بنا بر این، با دقت ۰/۰۰۰۱ داریم $x = ۰/۳۴۲۲$.

۱۰ از آنجا که $\cos ۰ = ۱$ و $\cos ۱ > ۰$، بنا بر این، معادله‌ی $x = \cos x$ یک ریشه در بازه‌ی $[۰,۱]$ دارد. از آنجا که $\left|\varphi'(x)\right| \le \sin ۱ < ۱$، بنا بر این، می‌توان از روش تقریبات متوالی استفاده کرد. با قرار دادن $x_۱ = ۱$، با دقت ۰/۰۰۰۱ به دست می‌آوریم $x = ۰/۷۳۹۱$.

۱۱ از شکل ۲۸ می‌توان دید که ریشه‌های مثبت معادله نزدیک به نقاط تقاطع نمودار تابع $y = \cos x$ با محور x قرار دارند و در طرف راست نقاط تقاطع نوع $(۲k+۱)\pi + \frac{\pi}{۲}$ و در طرف چپ نقاط تقاطع نوع $۲k\pi + \frac{\pi}{۲}$ واقع می‌شوند. برای پیدا کردن جواب در مجاورت نقطه‌ی $x = \frac{\pi}{۲} + n\pi$، قرار دهید $x - n\pi - \frac{\pi}{۲} = y$. به این ترتیب،

معادله به شکل زیر در می‌آید:

$$y + n\pi + \frac{\pi}{۲} = \frac{۱}{\cos\left(y + n\pi + \frac{\pi}{۲}\right)} = \frac{(-۱)^{n+۱}}{\sin y}\,.$$

از آنجا که $-\frac{\pi}{۲} \leq y \leq \frac{\pi}{۲}$، لذا معادله را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$y = (-۱)^{n+۱} \arcsin \frac{۱}{y + n\pi + \frac{\pi}{۲}}\,.$$

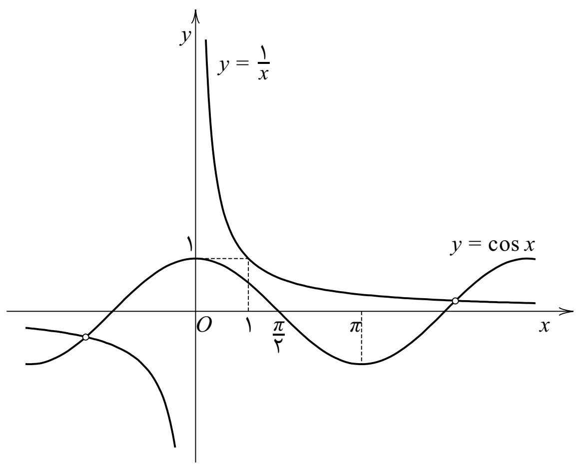
در اینجا

$$\varphi(y) = (-۱)^{n+۱} \arcsin \frac{۱}{y + n\pi + \frac{\pi}{۲}}\,,$$

و

$$\varphi'(y) = \frac{(-۱)^{n+۱}}{\sqrt{\left(y + n\pi + \frac{\pi}{۲}\right)^{۲} - ۱}\left(y + n\pi + \frac{\pi}{۲}\right)}\,.$$

واضح است که در مجاورت نقطه‌ی $y = ۰$ داریم $|\varphi'(y)| < q < ۱$، و لذا می‌توانیم از روش تقریبات متوالی استفاده کنیم. جواب را برای $n = ۱$ با دقت ۰٫۰۰۱ به دست آوریم. فرض کنید $y_۰ = ۰$. آنگاه $y_۲ \approx \varphi(y_۲) \approx ۰٫۲۰۴$. بنا بر این، $y \approx ۰٫۲۰۴$. لذا $x = \frac{۳}{۲}\pi + y \approx ۴٫۹۱۷$.



شکل ۲۸

برای پیدا کردن اولین ریشه‌ی منفی، قرار می‌دهیم $n = -۱$. معادله‌ی زیر حاصل می‌شود:

$$y = \arcsin \frac{۱}{y - \frac{\pi}{۲}}\,.$$

قرار دهید $y_0 = 0$. آنگاه

$$y_6 \approx \varphi(y_6) \approx -0/503.$$

لذا $y \approx -0/503$ و $x \approx -2/074$.

برای مقادیر بزرگ $|n|$، روش تقریبات متوالی یک فرمول تقریبی برای y به ما می‌دهد:

$$y \approx \varphi(y_0) = (-1)^{n+1} \arcsin \frac{1}{n\pi + \frac{\pi}{2}} \approx \frac{(-1)^{n+1} \times 2}{(2n+1)\pi}.$$

بنا بر این،

$$x \approx \frac{\pi}{2}(2n+1) + \frac{(-1)^{n+1} \times 2}{(2n+1)\pi}.$$

۱۲ با قرار دادن $x_1 = 0$، به دست می‌آوریم $x_3 \approx \varphi(x_3) \approx 1/088$. بنا بر این، با دقت $0/001$ داریم $x = 1/088$.

۱۳ ابتدا معادله‌ی $x = \sqrt{\log(x+2)}$ را حل کنید. داریم $\varphi(x) = \sqrt{\log(x+2)}$، و بنا بر این،

$$\varphi'(x) = \frac{\log e}{2(x+2)\sqrt{\log(x+2)}}.$$

از آنجا که $\varphi(0) = \sqrt{\log 2} > 0$ و $\varphi(1) = \sqrt{\log 3} < 1$، بنا بر این، معادله ریشه‌ای در بازه‌ی $[0, 1]$ دارد. روی این بازه، نامعادله‌ی $|\varphi'(x)| < q < 1$ برقرار است. بنا بر این، روش تقریبات متوالی قابل اعمال است. با قرار دادن $x_1 = 1$، داریم $x_5 \approx \varphi(x_5) \approx 0/6507$. بنا بر این، ریشه‌ی معادله‌ی $x = \sqrt{\log(x+2)}$ با دقت $0/0001$ برابر است با $x = 0/6507$.

معادله‌ی

$$x = -\sqrt{\log(x+2)}$$

را در نظر بگیرید. در اینجا

$$\varphi(x) = -\sqrt{\log(x+2)}.$$

از آنجا که $\varphi(0) = -\sqrt{\log 2} = -0/55$ و $\varphi\left(-\frac{1}{2}\right) = -\sqrt{\log 1/5} = -0/42$، لذا معادله یک ریشه روی بازه‌ی $\left[-\frac{1}{2}, 0\right]$ دارد. با قرار دادن $x_1 = 0$، به دست می‌آوریم $x_8 \approx \varphi(x_8) \approx -0/4397$. بنا بر این، با دقت $0/0001$ داریم $x = -0/4397$.

۱۴ یکی از ریشه‌های معادله $x = 0$ است. برای پیدا کردن ریشه‌ی دیگر، معادله را به شکل $x = \pm\sqrt{\ln(x+1)}$ بنویسید. برای معادله‌ی $x = \sqrt{\ln(x+1)}$ داریم

$$\varphi\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\ln\frac{3}{2}} > \frac{1}{2},$$

$$\varphi(1) = \sqrt{\ln 2} < 1.$$

بنا بر این، معادله ریشه‌ای روی بازه‌ی $[1/2, 1]$ دارد. از آنجا که $\varphi'(x) = \frac{1}{2(x+1)\sqrt{\ln(x+1)}}$، لذا روی بازه‌ی $[1/2, 1]$ داریم $|\varphi'(x)| < q < 1$. قرار دهید $x_1 = 1$، آنگاه $x_9 \approx \varphi(x_9) \approx 0/7469$. بنا بر این، با دقت $0/0001$ داریم $x = 0/7469$. معادله‌ی $x = -\sqrt{\ln(x+1)}$ هیچ ریشه‌ای غیر از $x = 0$ ندارد. بنا بر این، $x = 0$ یا $x = 0/7469$.

۱۵ معادله را به صورت

$$x = \sqrt{۴ - \ln x}$$

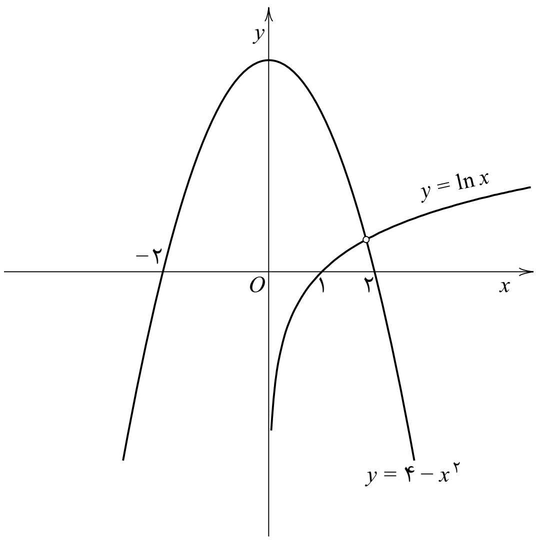
بازنویسی کنید. در اینجا

$$\varphi(۱) = ۲, \quad \varphi(۲) = \sqrt{۴ - \ln ۲}, \quad \varphi'(x) = \frac{-۱}{۲x\sqrt{۴ - \ln x}}.$$

از آنجا که $\varphi(۱) = ۲$ و $\varphi(۲) = \sqrt{۴ - \ln ۲} < ۲$، بنا بر این، معادله ریشه‌ای در بازه‌ی $[۱, ۲]$ دارد. از شکل ۲۹ می‌توان دید که ریشه‌ی دیگری وجود ندارد. با قرار دادن $x_۱ = ۲$، به دست می‌آوریم:

$$x_۴ \approx \varphi(x_۴) \approx ۱/۸۴۱.$$

لذا، با دقت ۰/۰۰۱ داریم $x = ۱/۸۴۱$.



شکل ۲۹

۱۶ معادله را به صورت

$$x = ۲ - \ln x$$

بنویسید. در اینجا، $\varphi(x) = ۲ - \ln x$ و $\varphi'(x) = -\frac{۱}{x}$. از شکل ۳۰ می‌توان دید که ریشه‌ی معادله روی بازه‌ی $[۱, ۲]$ واقع است. در این بازه، $|\varphi'(x)| \le ۱$. با قرار دادن $x_۱ = ۱/۵$، به دست می‌آوریم $x_{۱۳} \approx \varphi(x_{۱۳}) \approx ۱/۵۵۷$. از این رو، با دقت ۰/۰۰۱ داریم $x = ۱/۵۵۷$.

۱۷ از شکل ۳۱ می‌توان دید که معادله فقط یک ریشه‌ی منفی دارد. معادله را به صورت

$$x = -\sqrt{e^x + ۲}$$

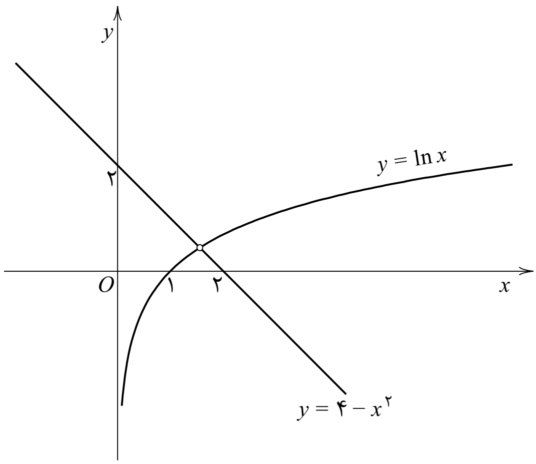
بنویسید. آنگاه

$$\varphi(x) = -\sqrt{e^x + ۲}, \quad \varphi'(x) = \frac{-e^x}{۲\sqrt{e^x + ۲}}.$$

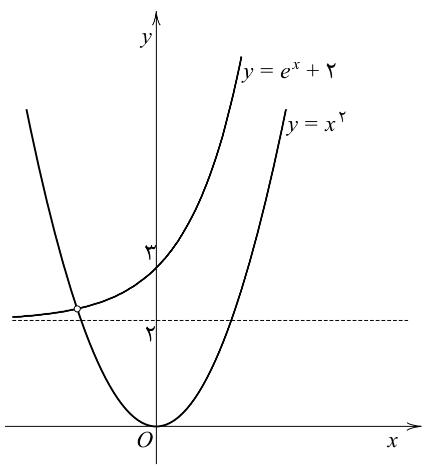
و

$$\varphi(-۱) = -\sqrt{۲ + e^{-۱}} \approx -۱/۵۴; \quad \varphi(-۲) = -\sqrt{۲ + e^{-۲}} \approx -۱/۴۶.$$

بنا بر این، ریشه در بازه‌ی $[-۲, -۱]$ قرار دارد. با قرار دادن $x_۱ = -۱$، به دست می‌آوریم $x_۴ \approx \varphi(x_۴) \approx -۱/۴۹۲$. از این رو، با دقت ۰/۰۰۱ داریم $x = -۱/۴۹۲$.



شکل ۳۰



شکل ۳۱

۱۸ روشن است که یکی از ریشه‌های معادله $x_۱ = ۱۰$ است. برای پیدا کردن ریشه‌ی دوم، معادله را به صورت $x = ۱۰^{۰/۱x}$ بنویسید. در اینجا $\varphi(x) = ۱۰^{۰/۱x}$ و $\varphi'(x) = ۰/۱ \times ۱۰^{۰/۱x} \ln ۱۰$. همچنین، $\varphi(۱) = ۱۰^{۰/۱} > ۱$ و $\varphi(۲) = ۱۰^{۰/۲} < ۲$. بنا بر این، معادله در بازه‌ی $[۱, ۲]$ یک ریشه دارد. در این بازه، $\varphi'(x) \le ۰/۱ \times ۱۰^{۰/۲} \ln ۱۰ \approx ۰/۳۷ < ۱$. اکنون می‌توان از روش تقریبات متوالی استفاده کرد. با قرار دادن

$x_1 = ۲$، داریم $x_۷ \approx \varphi(x_۷) \approx ۱/۳۷۲$. بنا بر این، با دقت ۰/۰۰۱ داریم $x = ۱/۳۷۲$.

۱۹ از شکل ۳۲ می‌توان دید که معادله در هر یک از بازه‌های $\left[\frac{\pi}{۲} + n\pi, \frac{\pi}{۲} + (n+۱)\pi\right],\ n = ۰, ۱, \ldots$ یک ریشه دارد که این ریشه در نیمه‌ی راست هر بخش قرار دارد. برای پیدا کردن نخستین ریشه‌ی مثبت، جایگزین کنید $x = \frac{۳\pi}{۲} - y$. به این ترتیب، معادله به صورت زیر در می‌آید

$$\cot y = \log\left(\frac{۳\pi}{۲} - y\right),$$

که از اینجا داریم:

$$y = \operatorname{arccot}\left[\log\left(\frac{۳}{۲}\pi - y\right)\right],$$

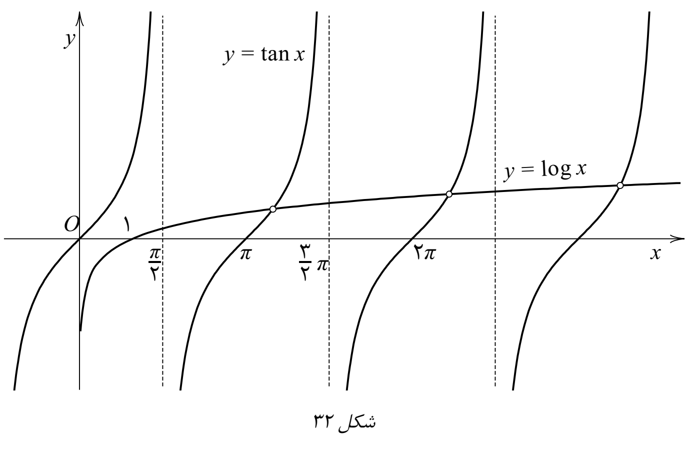
زیرا $۰ < y < \pi$. در اینجا

$$\varphi(y) = \operatorname{arccot}\left[\log\left(\frac{۳}{۲}\pi - y\right)\right],$$

و

$$\varphi'(y) = \frac{-\log e}{\left[۱ + \log^۲\left(\frac{۳}{۲}\pi - y\right)\right]\left(\frac{۳}{۲}\pi - y\right)}.$$

روی بازه‌ی $[۰, \pi]$، یک ریشه از معادله‌ی ما قرار دارد. به علاوه، در این بازه، $|\varphi'(y)| \leq ۱$. روش تقریبات متوالی را به کار می‌بریم. با قرار دادن $y_۱ = ۰$، داریم $y_۴ \approx \varphi(y_۴) \approx ۱/۰۵۹$. بنا بر این، با دقت ۰/۰۰۱ داریم $y = ۱/۰۵۹$ و بنا بر این، $x = ۳/۶۵۴$.



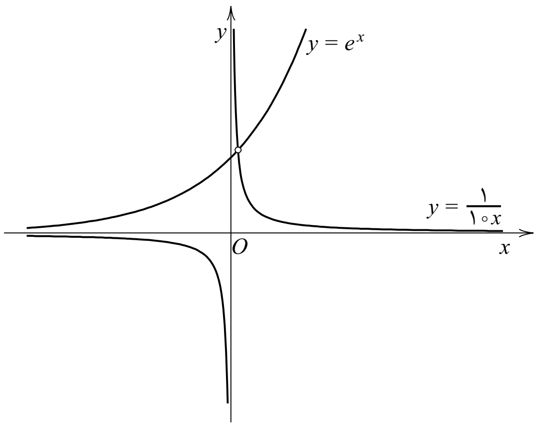
شکل ۳۲

برای پیدا کردن دومین ریشه‌ی مثبت، قرار می‌دهیم $x = \frac{۵\pi}{۲} - y$. معادله به صورت زیر در می‌آید:

$$y = \operatorname{arccot}\left[\log\left(\frac{۵}{۲}\pi - y\right)\right].$$

با قرار دادن $y_۱ = ۰$، داریم $y_۴ \approx \varphi(y_۴) \approx ۰/۸۷۰$. لذا با دقت ۰/۰۰۱ داریم $y = ۰/۸۷۰$ و $x = ۶/۹۸۴$.

۲۰ از شکل ۳۳ می‌توان دید که معادله یک ریشه‌ی منفرد دارد که بین ۰ و ۱ قرار دارد. داریم $\varphi(x) = \frac{۱}{۱۰} e^{-x}$ و $\varphi'(x) = -\frac{۱}{۱۰} e^{-x}$. روی بازه‌ی $[۰, ۱]$، نامعادله‌ی $\varphi'(x) \leq \frac{۱}{۱۰}$ برقرار است، که این سبب می‌شود که بتوانیم از روش تقریبات متوالی استفاده کنیم. با قرار دادن $x_۱ = ۰$، داریم $x_۴ \approx \varphi(x_۴) \approx ۰/۰۹۱$. از این رو، با دقت ۰/۰۰۰۱ داریم $x = ۰/۰۹۱$.



شکل ۳۳

۲۱ فرض کنید

$$f(x) = x^۳ - ۵x + ۱.$$

آنگاه

$$f'(x) = ۳x^۲ - ۵, \quad f''(x)(x) = ۶x.$$

با استفاده از فرمول نیوتن داریم

$$\beta_{n+۱} = \beta_n - \frac{\beta_n^۳ - ۵\beta_n + ۱}{۳\beta_n^۲ - ۵}.$$

جدولی از مقادیر تابع را محاسبه کنید:

x	-۳	-۲	-۱	۰	۱	۲	۳
$f(x)$	-۱۱	۳	۵	۱	-۳	-۱	۱۳

از این جدول دیده می‌شود که معادله‌ی $x^۳ - ۵x + ۱ = ۰$ ریشه‌هایی در بازه‌های $[-۳, -۲]$، $[۰, ۱]$، و $[۲, ۳]$ دارد.

ابتدا ریشه‌ای را که در بازه‌ی $[-۳, -۲]$ قرار دارد، پیدا می‌کنیم. از آنجا که در این بازه $f''(x) < ۰$، لذا مقدار ابتدایی $\beta_۰ = -۳$ را انتخاب می‌کنیم (چون $f(\beta_۰) = -۱۱$ یک عدد منفی است). داریم:

$$\beta_۱ = -۳ - \frac{(-۳)^۳ - ۵(-۳) + ۱}{۳(-۳)^۲ - ۵} = -۲/۵.$$

با ادامه‌ی محاسبه می‌بینیم که $\beta_۳ \approx \beta_۴ \approx -۲/۳۳۱$ و بنا بر این، با دقت ۰/۰۰۰۱، ریشه‌ی معادله در بازه‌ی $[-۳, -۲]$ عبارت است از ۲/۳۳۱−.

بعد، ریشه‌ای را که در بازه‌ی $[۰, ۱]$ قرار گرفته است، پیدا می‌کنیم. در اینجا داریم $f''(x) \geq ۰$. بنا بر این، قرار می‌دهیم $\beta_۰ = ۰$. به این ترتیب، خواهیم داشت:

$$\beta_۱ = ۰ - \frac{۰^۳ - ۵ \times ۰ + ۱}{۳ \times ۰^۲ - ۵} = ۰/۲, \quad \beta_۳ \approx \beta_۴ \approx ۰/۲۰۲.$$

با دقت ۰/۰۰۱ داریم $x = ۰/۲۰۲$.

و بالاخره، برای پیدا کردن ریشه‌ی واقع در بازه‌ی $[۲, ۳]$، قرار می‌دهیم $\beta + ۰ = ۳$، و داریم

$$\beta_۱ = ۳ - \frac{۳^۳ - ۵ \times ۳ + ۱}{۳ \times ۳^۲ - ۵} \approx ۲/۴۰۹.$$

با ادامه‌ی محاسبه، داریم $\beta_۴ \approx \beta_۵ \approx ۲/۱۲۸$. لذا، با دقت ۰/۰۰۱، ریشه برابر با ۲/۱۲۸ است. پس سه ریشه را پیدا کردیم: $x_۱ = -۲/۳۳۱\,;\, x_۲ = ۰/۲۰۲\,;\, x_۳ = ۲/۱۲۸$.

این معادله را با استفاده از روش بهبود یافته‌ی وترها حل کنید. روی بازه‌ی $[-۳, -۲]$ داریم:

$$\alpha_۱ = -۳ - f(-۳)\,\frac{-۳ - (-۲)}{f(-۳) - f(-۲)} = -۳ + ۱۱\,\frac{-۳}{-۱۴} \approx -۲/۲۱۴.$$

از آنجا که روی این بازه $f''(x) < ۰$، لذا تقعر منحنی به طرف پایین است، و $\alpha_۲$ با استفاده از فرمول زیر به دست می‌آید:

$$\alpha_۲ = -۳ - f(-۳)\,\frac{-۳ - (-۲/۲۱۴)}{f(-۳) - f(-۲/۲۱۴)} \approx -۲/۲۹۳.$$

حال به دست می‌آوریم:

$$\alpha_۳ = -۲/۲۹۳ - f(-۲/۲۹۳)\,\frac{-۲/۲۹۳ - (-۲/۲۱۴)}{f(-۲/۲۹۳) - f(-۲/۲۱۴)} \approx -۲/۳۳۱.$$

این جواب با دقت ۰/۰۰۱ بر مقدار x به دست آمده در بالا منطبق است.

برای حل معادله روی بازه‌های $[۰, ۱]$ و $[۲, ۳]$ نیز از همین روش استفاده می‌شود.

۲۲ در اینجا داریم:

$$f(x) = x^۳ - ۹x^۲ + ۲۰x - ۱۱$$

$$f'(x) = ۳x^۲ - ۱۸x + ۲۰$$

$$f''(x) = ۶x - ۱۸ = ۶(x - ۳)$$

جدول مقادیر تابع $f(x)$ را تنظیم می‌کنیم:

x	۰	۱	۲	۳	۴	۵	۶
$f(x)$	−۱۱	۱	۱	−۵	−۱۱	−۱۱	۱

ریشه‌های معادله روی بازه‌های $[۰,۱]$، $[۲,۳]$، و $[۵,۶]$ قرار دارند.

روی بازه‌ی $[۰,۱]$، قرار می‌دهیم $\beta_۰ = ۰$ و داریم $\beta_۴ \approx \beta_۵ \approx ۰/۸۳۴$. روی بازه‌ی $[۲,۳]$، قرار می‌دهیم $\beta_۰ = ۳$ و داریم $\beta_۲ \approx \beta_۳ \approx ۲/۲۱۶$. روی بازه‌ی $[۵,۶]$، قرار می‌دهیم $\beta_۱ = ۰$ و داریم $\beta_۴ \approx \beta_۵ \approx ۵/۲۴۹$. به این ترتیب، سه ریشه‌ی معادله را (با دقت ۰/۰۰۱) پیدا کردیم:

$$x_۱ = ۰/۸۳۴, \quad x_۲ = ۲/۲۱۶, \quad x_۳ = ۵/۲۴۹.$$

۲۳ در اینجا، $f(x) = x^۳ - ۳x^۲ - ۳x + ۱۱$، $f'(x) = ۳x^۲ - ۶x - ۳$ و $f''(x) = ۶x - ۶ = ۶(x-۱)$. جدولی از مقادیر $f(x)$ تشکیل می‌دهیم:

x	-۲	-۱	۰	۱	۲	۳
$f(x)$	-۳	۱۰	۱۱	۶	۱	۲

معادله یک ریشه‌ی حقیقی واقع در بازه‌ی $[-۲,-۱]$ دارد. برای پیدا کردن این ریشه، قرار می‌دهیم $\beta_۰ = -۲$. به دست می‌آوریم $\beta_۲ \approx \beta_۳ \approx -۱/۸۴۷$. بنا بر این، با دقت ۰/۰۰۱ داریم $x = -۱/۸۴۷$.

۲۴ در اینجا، $f(x) = x^۵ + ۵x + ۱$، $f'(x) = ۵x^۴ + ۵$، و $f''(x) = ۲۰x^۳$. جدول مقادیر $f(x)$ به صورت زیر است:

x	-۱	۰	۱
$f(x)$	-۵	۱	۷

بنا بر این، معادله یک ریشه روی بازه‌ی $[-۱,۰]$ دارد. قرار می‌دهیم $\beta_۰ = -۱$. با دقت ۰/۰۰۰۱ داریم $\beta_۳ \approx \beta_۴ \approx -۰/۱۹۹۹$. بنا بر این، با دقت ذکر شده $x = -۰/۱۹۹۹$.

۲۵ در اینجا، $f(x) = \sin x + x - ۱$، $f'(x) = \cos x + ۱$، و $f''(x) = -\sin x$. جدول مقادیر $f(x)$ به صورت زیر است:

x	۰	۱	۲
$f(x)$	-۱	۰/۸۱۱۵	۱/۹۰۹۳

ریشه روی بازه‌ی $[۰,۱]$ واقع است. با قرار دادن $\beta_۰ = ۰$ داریم $\beta_۲ \approx \beta_۳ \approx ۰/۵۱۱۰$. بنا بر این، با دقت ۰/۰۰۰۱ داریم $x = ۰/۵۱۱۰$.

۲۶ در اینجا، $f(x) = x^۲ - ۱۰\log x - ۳$، $f'(x) = ۲x - \frac{۱۰}{x\ln ۱۰}$، و $f''(x) = ۲ + \frac{۱۰}{x^۲\ln ۱۰}$. جدول مقادیر $f(x)$ به صورت زیر است:

x	۰/۵	۰	۱
$f(x)$	۰/۲۶	-۲	$-۲/۰۱$

ریشه‌های معادله روی بازه‌های $[۰/۵,۱]$ و $[۲,۳]$ واقع است. روی بازه‌ی $[۰/۵,۱]$ قرار می‌دهیم $\beta_۰ = ۰/۵$ و به دست می‌آوریم $\beta_۲ \approx \beta_۳ \approx ۰/۵۳۵$. بنا بر این، با دقت ۰/۰۰۱ داریم $x = ۰/۵۳۵$. روی بازه‌ی $[۲,۳]$ قرار

می‌دهیم $\beta_{0} = 3$ و به دست می‌آوریم $\beta_2 \approx \beta_3 \approx 2/705$.

معادله دو ریشه دارد: $x_1 = 0/535$ و $x_2 = 2/705$.

۲۷ در دستگاه معادلات (a)، قرار می‌دهیم $x_0 = 0, y_0 = 0, z_0 = 0$، و پس از چند تقریب معدود با دقت $0/001$ حاصل می‌شود $x = 1/021, y = 2/150, z = 3/072$.

در دستگاه معادلات (b)، قرار می‌دهیم $x_0 = 0, y_0 = 0$، و پس از چند تقریب معدود (با دقت $0/001$) حاصل می‌شود $x = 0/520, y = 0/310$.

در دستگاه معادلات (c)، قرار می‌دهیم $x_0 = 0, y_0 = 0$، و به دست می‌آوریم $x = 1/000, y = 2/000$.